



中国科学院大学  
University of Chinese Academy of Sciences

# 博士学位论文

Coxeter 群的“反射”表示

作者姓名: 胡泓昇

指导教师: 席南华 研究员

中国科学院数学与系统科学研究院

学位类别: 理学博士

学科专业: 基础数学

培养单位: 中国科学院数学与系统科学研究院

2022 年 6 月



**“Reflection” representations of Coxeter groups**

---

**A dissertation submitted to  
University of Chinese Academy of Sciences  
in partial fulfillment of the requirement  
for the degree of  
Doctor of Philosophy  
in Mathematics**

**By**

**Hu Hongsheng**

**Supervisor: Professor Xi Nanhua**

**Academy of Mathematics and Systems Science,  
Chinese Academy of Sciences**

**June 2022**



**中国科学院大学**  
**研究生学位论文原创性声明**

本人郑重声明：所呈交的学位论文是本人在导师的指导下独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果。对论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明或致谢。

作者签名：

日 期：

**中国科学院大学**  
**学位论文授权使用声明**

本人完全了解并同意遵守中国科学院有关保存和使用学位论文的规定，即中国科学院有权保留送交学位论文的副本，允许该论文被查阅，可以按照学术研究公开原则和保护知识产权的原则公布该论文的全部或部分內容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存、汇编本学位论文。

涉密及延迟公开的学位论文在解密或延迟期后适用本声明。

作者签名：

日 期：

导师签名：

日 期：



## 摘要

不可约的 Coxeter 系统  $(W, S)$  中  $\alpha$ -函数值为 1 的元素构成一个双边胞腔  $\mathcal{C}_1$ , 本文给出  $\mathcal{C}_1$  的胞腔表示的一个刻画, 称为 (A1) 条件: 任意一对满足  $m_{rt} < \infty$  的  $r, t \in S$  没有特征值为  $-1$  的公共的特征向量。特别地,  $W$  的几何表示的不可约商是  $\mathcal{C}_1$  给出的胞腔表示的商。

在 (A1) 条件下, 我们引入一类表示 (文中称为 IR-表示), 可视为几何表示的推广,  $S$  中的每个元素在这类表示上的作用为一个“反射”。通过考察  $W$  的二面体子群的表示的“粘合”, 我们可以借助一些图的同调群的特征标得到 IR-表示的分类。

与几何表示类似, 可通过判断某个矩阵是否可逆来判断一个不可分解的 IR-表示是否不可约, 且当它可约时,  $W$  在其真子表示上的作用是平凡的。与几何表示不同的是, IR-表示上不一定存在群作用不变的双线性型。我们确定了这样的双线性型存在的充要条件。

对 Coxeter 图中不含或只含有一个回路的单连丝型 Coxeter 群, 文中证明了  $\mathcal{C}_1$  给出的胞腔表示的不可约商都是 IR-表示的不可约商, 从而这类 Coxeter 群  $\alpha$ -函数值为 1 的不可约表示都被确定了。

在对 IR-表示结构的考察中, 我们受到启发, 利用图的拓扑结构构造出一些 Coxeter 群的无穷维不可约表示。据此我们猜测一个 Coxeter 群具有无穷维不可约表示当且仅当它不是有限群和仿射 Weyl 群。

最后考虑秩为 3 的双曲型 Coxeter 群几何表示的张量积, 由于该群在几何表示下的像的 Zariski 闭包为  $A_1$  型简约群  $O_3(\mathbb{C})$ , 张量积的半单分解遵循 Clebsch-Gordan 的模式。

**关键词:** Coxeter 群, 胞腔表示, IR-表示, 无穷维表示, 几何表示的张量积





## Abstract

Elements of  $\alpha$ -function value 1 in an irreducible Coxeter system  $(W, S)$  form a two-sided cell  $\mathcal{C}_1$ . In this dissertation we give a description of the cell representation provided by  $\mathcal{C}_1$ , which is called the condition (A1): for any  $r, t \in S$  satisfying  $m_{rt} < \infty$ , there is no common eigenvector of them with eigenvalue  $-1$ . In particular, the simple quotient of the geometric representation is a quotient of the cell representation provided by  $\mathcal{C}_1$ .

Under the condition (A1), we introduce a class of representations (called IR-representations in this dissertation), which can be viewed as a generalization of the geometric representation. Each element in  $S$  acts on them by a “reflection”. By investigating the “gluing” of representations of dihedral subgroups of  $W$ , we obtain the classification of IR-representations with the help of characters of the homology groups of certain graphs.

Similar to the geometric representation, the irreducibility of an indecomposable IR-representation can be decided via the non-degeneracy of certain matrix. When it is reducible, the actions of  $W$  on its proper subrepresentations are all trivial. However, different to the geometric representation, there might not be a bilinear form on an IR-representation invariant under the action of  $W$ . We determine the necessary and sufficient condition for such bilinear form to exist.

It is proved that, for a simply laced Coxeter group with no circuits or only one circuit in its Coxeter graph, all of the simple quotients of the cell representation provided by  $\mathcal{C}_1$  are simple quotients of IR-representations. Therefore, for such Coxeter groups, all irreducible representations of  $\alpha$ -function value 1 are determined.

In the investigation of IR-representations, we are inspired to construct some infinite dimensional irreducible representations of some Coxeter groups utilizing the topology of certain graphs. Accordingly we conjecture that a Coxeter group has irreducible representations of infinite dimension if and only if it is not a finite group and an affine Weyl group.

At last, we consider tensor products of the geometric representation of hyperbolic Coxeter groups of rank 3. Since the image of such groups under the geometric representation has Zariski closure isomorphic to  $O_3(\mathbb{C})$ , which is a reductive group of type  $A_1$ , the semisimple decompositions of the tensor products abide by the Clebsch-Gordan rule.

**Key Words:** Coxeter groups, cell representations, IR-representations, infinite dimensional representations, tensor products of the geometric representation



目 录

第 1 章 前言	1
1.1 背景与历史	1
1.2 文章内容简介	4
1.3 一些约定	5
第 2 章 Kazhdan-Lusztig 理论的若干基础知识	6
2.1 胞腔, $\alpha$ -函数	6
2.2 表示和胞腔	12
2.3 基环 $\mathcal{J}$	16
2.4 有限 Coxeter 群及其 Hecke 代数的表示	19
2.5 二面体群	21
第 3 章 $\alpha$ -函数值为 1 的表示	24
3.1 Coxeter 群的几何表示	24
3.2 二面体群的表示	26
3.3 双边胞腔 $C_1$ 和 A1-表示	28
3.4 几何表示的 $q$ -形变	29
3.5 其他 A1-表示的 $q$ -形变	33
第 4 章 从图中构造表示	36
4.1 图的基本概念	36
4.2 Coxeter 图和 IR-表示分类	38
4.3 可约性和 R-表示	42
4.4 其他性质: 双线性型, 对偶表示	45
4.5 一般情形: 允许 $m_{rt} = \infty$	47
4.6 从 $\tilde{A}_n$ 型到单连丝型	49
4.7 图的基本群和无穷维表示	52
4.8 图的万有覆盖和无穷维表示	54
第 5 章 秩 3 Coxeter 群几何表示的张量积	60
5.1 Chevalley 的表示张量积定理	60
5.2 秩 3 Coxeter 群和 $SO_3(\mathbb{C})$	62

---

5.3 (半) 双线性型与半单性 . . . . .	65
5.4 张量积的半单分解 . . . . .	66
5.5 一个简单的例子 . . . . .	69
5.6 其它秩 3 双曲型 Coxeter 群的 Zariski 闭包 . . . . .	73
参考文献 . . . . .	81
致谢 . . . . .	85
作者简历及攻读学位期间发表的学术论文与研究成果 . . . . .	87

## 第 1 章 前言

### 1.1 背景与历史

欧氏空间上离散反射群的探索历史最早可追溯到古希腊人对正多面体的分类和对称性的研究, 三维空间中的五种正多面体 (其中两对互为对偶, 对偶的正多面体有相同的对称群) 的对称群分别为  $A_3$ ,  $B_3$  和  $H_3$  型的有限反射群。十九世纪人们对晶体结构和平面或球面上平铺问题的研究也为反射群提供了活跃的舞台, 许多数学工作者在这个领域产出了大量的成果, 其中不乏 W. R. Hamilton、F. Klein、A. Möbius 等著名数学家。在十九世纪中叶, L. Schläfli 系统地研究了一般维数欧氏空间上的正多面体的分类问题, 确定了它们的对称群, 以及这些反射群的基本域 (fundamental domain), 但当时没有引起重视。

几十年后, 李 (S. Lie) 理论兴起, 为反射群的研究注入新的生命力。粗略地说, 李理论是研究李代数、李群和代数群的学科。根系 (root system) 在 W. Killing 和 E. Cartan 对复有限维单李代数结构的分类中扮演了重要角色。设  $\mathfrak{g}$  为复有限维单李代数, 作为线性空间它有如下形式的分解,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_{\alpha},$$

其中  $\mathfrak{h}$  是  $\mathfrak{g}$  的 Cartan 子代数,  $R$  是对偶空间  $\mathfrak{h}^*$  的一个有限子集, 称为根系, 它记录了该李代数的结构,  $\mathfrak{g}_{\alpha}$  称为  $\mathfrak{g}$  的根子空间。因此复有限维单李代数与它们的根系一一对应, 关于这些李代数结构的分类等价于根系的分类。 $\mathfrak{h}$  的一个实形式  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  在 Killing 型下成为一个欧氏空间, 从而可以讨论上面的反射。对  $\alpha \in R$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , 记  $s_{\alpha, n}$  为关于平面  $\{x \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \mid \alpha(x) = n\}$  的反射。W. Killing 和 E. Cartan, 以及 H. Weyl, 把这些反射作用引入李理论及其表示论的研究中, 它们生成一个群, 即如今所说的仿射 Weyl 群, 其中固定原点的那些反射  $s_{\alpha, 0}$  生成的是一个有限子群, 现在称为 Weyl 群。

随即, 加拿大籍数学家 H. S. M. Coxeter 在 1934 年的论文 [11] 中得到了欧氏空间中不可约离散反射群的完整分类, 它们包括: Weyl 群  $A_n$  ( $n \geq 1$ ),  $B_n$  ( $n \geq 2$ ),  $D_n$  ( $n \geq 4$ ),  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$ ,  $F_4$ ,  $G_2$ ; 有限二面体群  $I_2(m)$  ( $m \geq 3$ ,  $I_2(3) = A_2$ ,  $I_2(4) = B_2$ ,  $I_2(6) = G_2$ );  $H_3$ ,  $H_4$ ; 仿射 Weyl 群  $\tilde{A}_n$  ( $n \geq 1$ ),  $\tilde{B}_n$  ( $n \geq 2$ ),  $\tilde{C}_n$  ( $n \geq 3$ ),  $\tilde{D}_n$  ( $n \geq 4$ ),  $\tilde{E}_6$ ,  $\tilde{E}_7$ ,  $\tilde{E}_8$ ,  $\tilde{F}_4$ ,  $\tilde{G}_2$ 。关于这些记号对应的群结构, 可参见 [8] 或 [20, Ch. 2, Ch. 4]。这些群中除了仿射 Weyl 群是无限群之外, 其余都是有限群。在 [11] 中, H. S. M. Coxeter 还证明了这些群有一种特殊的呈现 (presentation), 它们有一个有限的生成元集, 记为  $S$ ,  $S$  中的元素都是欧氏空间中的反射, 它们满足的关系只有

$$s^2 = (st)^{m_{st}} = e, \quad \forall s, t \in S.$$

这里  $m_{st} = m_{ts} \in \mathbb{N}_{\geq 2} \cup \{\infty\}$ 。反之, 在 [12] 中 H. S. M. Coxeter 证明了由这样的

生成关系定义的有限群必为上述所列之一，即 Weyl 群，有限二面体群，或  $H_3$ ,  $H_4$ 。于是，人们把由这种生成关系定义的群称为 Coxeter 群，见定义 2.1.1。在双曲几何中出现的一些反射群也具有这样的呈现。关于 Coxeter 群，[8, 17, 20] 是很好的教材，里面的历史注记也十分精彩。

Weyl 群在  $\mathfrak{h}^*$  上的作用是一个群表示，如上所说，这在李理论的研究中是一个基本且重要的对象。而一般地，T. A. Springer 的工作 [38, 39] 表明，Weyl 群的表示理论也和李理论中出现的几何对象有着密切联系，这件事情令人惊讶而且影响深远，人们称之为 Springer 理论。设  $G$  为连通的简约代数群 (reductive algebraic group)， $B$  是  $G$  中极大连通可解闭子群，称为一个 Borel 子群， $G/B$  是一个光滑的射影簇，称为旗簇 (flag variety)。例如，取  $G = GL_n(\mathbb{C})$ ， $B$  为所有可逆上三角矩阵，则旗簇为  $\mathbb{C}^n$  中所有的子空间序列  $\{(V_i)_{i=0,1,\dots,n} \mid \dim V_i = i, V_{i-1} \subseteq V_i, \forall i\}$ ，相应的 Weyl 群同构于对称群  $S_n$ 。T. A. Springer 构造了  $G$  的 Weyl 群  $W$  在旗簇的一些子簇 (称为 Springer 纤维) 的同调空间上的一个作用，并且证明了用这种方法可得到  $W$  所有的不可约表示。后来，S-i Kato 在 [23] 中也用类似的方法实现了仿射 Weyl 群的所有不可约表示。

但对于一般的 Coxeter 群  $W$ ，我们失去了李理论中几何工具的帮助，对这样的群的表示论知之甚少。所幸，我们还有一个典型的表示，类似于 Weyl 群在  $\mathfrak{h}^*$  上的作用。许多书中将这个表示称为几何表示。它有一组基  $\{\alpha_s \mid s \in S\}$ ，对应于生成元集  $S$ 。在表示空间上有一个对称的双线性型，类比于欧氏空间的内积。每一个生成元  $s \in S$  在该表示上的作用是关于这个双线性型的反射，反射的方向为  $\alpha_s$ ，具体的定义为

$$s \cdot \alpha_s = -\alpha_s, \quad s \cdot \alpha_t = \alpha_t + 2 \cos \frac{\pi}{m_{st}} \alpha_s, \quad \forall t \neq s.$$

J. Tits 对这个表示有深入的研究，也许是这个原因，不少文献也称该表示为 Tits 表示。几何表示的一些性质已经被人们熟知，例如当 Coxeter 群不可约 (见 2.1.1) 时，几何表示的可约性等价于上面的双线性型退化，且真子表示上的  $W$  作用都是平凡的。对这个表示的研究使人们对 Coxeter 群增加了许多了解，例如，在  $W$  上有个长度函数  $\ell$ ，它的值  $\ell(w)$  描述了  $W$  中的元素  $w$  最少能写成多少个  $S$  中生成元的乘积，详见 [8, 14, 20, 41] 等材料。

为了讲述后面的故事，我们还需要介绍一些概念。旗簇  $G/B$  在  $B$ -左作用下的轨道 (等价于  $G$  关于  $B$  的双陪集) 由  $G$  的 Weyl 群  $W$  参数化，

$$G = \bigsqcup_{w \in W} B\dot{w}B,$$

这里  $\dot{w}$  是  $w$  在  $G$  中的一个代表元。例如  $G = GL_n(\mathbb{C})$  时， $S_n$  中的一个元素在  $G$  中的代表元可取为置换矩阵。旗簇中  $B$ -轨道的闭包称为 Schubert 簇，与旗簇不同，它一般不是光滑的。若取  $G(q)$  为有限李型群，例如  $GL_n(\mathbb{F}_q)$ ，这里  $q$  是素数的方幂，那么旗簇  $G(q)/B(q)$  上  $B(q)$ -不变的复值函数在卷积下构成一个结合代数，称为 Hecke 代数，它的维数与  $W$  的阶相同， $\{T_w \mid w \in W\}$  是一组基，这里  $T_w$  是双陪集  $B(q)\dot{w}B(q)$  上的特征函数，即在该集合上取值为 1 而在其他

双倍集上取值为 0。这组基的乘法关系和群代数  $\mathbb{C}[W]$  类似，

$$\begin{aligned} T_s T_w &= T_{sw}, \quad \text{若 } s \in S, \ell(sw) = \ell(w) + 1, \\ T_s T_w &= (q - 1)T_w + qT_{sw}, \quad \text{若 } s \in S, \ell(sw) = \ell(w) - 1. \end{aligned}$$

因此 Hecke 代数可视为  $\mathbb{C}[W]$  的一个  $q$ -形变。取  $B(q)$  的平凡表示  $\mathbf{1}$ ，诱导为  $G(q)$  的表示  $\mathbf{1}_B^G$ ，N. Iwahori 在 [21] 中证明了  $\mathbf{1}_B^G$  的自同态环与 Hecke 代数同构。后来人们知道 (例如 [8, Ch. IV, §2, Ex. 27]) 或 [27])，此时 Hecke 代数和  $\mathbb{C}[W]$  有一个不平凡的同构，于是 N. Iwahori 的上述结果给出了出现在  $\mathbf{1}_B^G$  中的  $G(q)$  的不可约表示与 Weyl 群不可约表示的一个对应。对一般的 Coxeter 群  $W$ ，也可抽象地定义相应的 Hecke 代数，它是  $\mathbb{C}[q]$  (或者扩张为  $\mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}]$ ) 上的代数，有一组标准基  $\{T_w | w \in W\}$  和  $W$  的元素一一对应，这时  $q$  视为一个不定元，见定义 2.1.3。

T. A. Springer 关于 Weyl 群表示论的工作把 D. Kazhdan 和 G. Lusztig 引向了对 Schubert 簇的奇性的研究，他们尝试去理解 T. A. Springer 构造的表示，比如寻找这些表示的基向量。很快，1979 年，他们划时代的论文 [24] 问世。这篇文章的研究对象不仅是 Weyl 群，他们用组合的手段构造了一般 Coxeter 群  $W$  的 Hecke 代数的一组基  $\{C_w | w \in W\}$ ，后人称为 Kazhdan-Lusztig 基，我们将在第 2 章中详细介绍。这些基的乘法关系引出了  $W$  上的几种划分，相应的等价类分别称为左、右、双边胞腔 (cell)，它们给出了 Coxeter 群和 Hecke 代数的一大类表示，称为胞腔表示。对于  $GL_n$  的 Weyl 群  $S_n$  来说，左胞腔给出的表示都是  $S_n$  的不可约表示，Kazhdan-Lusztig 基便是他们想要寻找的 Springer 表示的基。当然，[24] 的重要性远不止于此。例如，Kazhdan-Lusztig 基与标准基的转换关系由一组多项式  $\{P_{y,w}(q) | y, w \in W\}$  给出，称为 Kazhdan-Lusztig 多项式，这些多项式中蕴藏着 Schubert 簇的几何信息，见 [24] 的附录和 [25]；而且，猜想 [24, Conjecture 1.5] 预测李代数的单模在 Verma 模中的重数等于 Weyl 群中特定的 Kazhdan-Lusztig 多项式在  $q = 1$  处的取值；等等。

在一些不太强的条件下，如上文所提到的，Weyl 群的 Hecke 代数和群代数同构，但这个同构的形式比较复杂。二十世纪八十年代 G. Lusztig 在对这个问题及其它表示论相关问题的研究中，发展出  $\mathbf{a}$ -函数的理论，相关论文包括 [27, 30, 31] 等。 $\mathbf{a}$ -函数对表示论的重要性在第 2 章中可见端倪。它是  $W$  上的函数，在双边胞腔上取常值。若  $\mathbf{a}$ -函数在  $W$  上有界，则每一个不可约表示都可实现为胞腔表示的商。对一般的 Coxeter 群，若一个不可约表示是某个双边胞腔给出的表示的商，那么这个双边胞腔是唯一的，见 2.2.4 和 2.2.5。当 Coxeter 群不可约时， $\mathbf{a}$ -函数取值为 1 的元素构成一个双边胞腔，它的结构相对简单，本文将它记为  $C_1$ ，见 2.1.22。上文提到的几何表示 (或它的不可约商) 恰好是  $C_1$  给出的胞腔表示的商，见 3.3 节。

不似对称群  $S_n$ ，对一般的 Coxeter 群来说胞腔给出的表示“太大了”。在文中我们将看到， $C_1$  给出的表示可能有无穷多个不同构的不可约商，甚至还可能有无穷维的不可约商。本文以  $C_1$  的胞腔表示为主要研究对象，给出它们的刻

画，并分类其中的一小部分。关于本文内容的更多介绍，见 1.2 节。

## 1.2 文章内容简介

本文以  $\alpha$ -函数值为 1 的双边胞腔给出的 Coxeter 群的表示为主要研究对象。第 2 章回顾本文需要使用的 Kazhdan-Lusztig 理论的部分知识，主要包括 Hecke 代数的 Kazhdan-Lusztig 基和 Coxeter 群的胞腔的定义，以及通过它们给出胞腔表示的构造。在此过程中通过对符号表示的考察我们碰巧给出了  $\alpha$ -函数有界的 Coxeter 群最低双边胞腔存在性的一个简单证明，见 2.2.7。2.5 节以有限和无限二面体群为例，清晰计算出二面体群中 Kazhdan-Lusztig 基乘法的结构常数。

在不可约 Coxeter 群的双边胞腔中，具有唯一既约表达的非幺元素构成一个双边胞腔  $\mathcal{C}_1$ ，它们恰是  $\alpha$ -函数取值为 1 的元素全体，见 2.1.22。第 3 章探究双边胞腔  $\mathcal{C}_1$  给出的  $W$  的胞腔表示。3.3.2 给出了这些表示的一个刻画，即 (A1) 条件：

- (A1) 对任意两个互异的单反射  $r, t \in S$ ，若  $m_{rt} < \infty$ ，则不存在  $v \in V \setminus \{0\}$ ，使得  $r \cdot v = t \cdot v = -v$ 。

在满足该条件的  $W$  的不可约表示中，除了平凡表示对应于最高的胞腔  $\{e\}$  外，其余皆是  $\mathcal{C}_1$  给出的胞腔表示的不可约商。特别地，几何表示 (或它的不可约商) 满足这个条件。3.4 节和 3.5 节考虑将这些表示提升到 Hecke 代数上，即构造它们的  $q$ -形变。

在第 4 章中，我们首先考虑满足如下条件的  $W$  的表示  $V$ ，

- (IR)  $V$  有一组基  $\{\alpha_s \mid s \in S\}$ ，且对任意的  $s \in S$  存在余维数为 1 的子空间  $H_s$  使得  $s|_{H_s} = \text{Id}_{H_s}$ ，并且  $s \cdot \alpha_s = -\alpha_s$ 。

把这样的表示称为 IR-表示，它们满足条件 (A1)。在 IR-表示  $V$  中，每一个  $s \in S$  在  $V$  上的作用都是关于一个超平面的反射，且反射的方向各不相同。通过将这个表示限制在每一对单反射生成的二面体子群上，考察这些二面体群的表示互相之间如何“粘”成整个表示，我们发现，这个表示的同构类可以由某个图的同调群的特征标确定，以此得到 IR-表示的分类。这是 4.2 节的主要内容。这里出现的图与 Coxeter 群的 Coxeter 图有关。所谓 Coxeter 图，是指以生成元集  $S$  为顶点集，并连接所有满足  $m_{st} \geq 3$  的顶点  $s$  和  $t$  作为边，在这条边上标记  $m_{st}$ ，以此得到的图。

如上一节所介绍的，可以通过判断一个矩阵是否退化来得知几何表示的可约性，并且它的真子表示都是平凡的表示。IR-表示也有类似的性质，见 4.3 节。在这一节中我们还发现，如果放宽条件 (IR) 的要求，不再要求  $\{\alpha_s\}_s$  线性无关，那么得到的表示和上述的差不了太多，总是 IR-表示关于具有  $W$  平凡作用的真子表示的商，文中把它们称为 R-表示。

4.4 节考察这些表示的其他一点性质，它们都和上述的图同调群的特征标有关。和几何表示不同的是，在 IR-表示上不见得有群作用不变的双线性型。这样的双线性型要求相应的图同调群的特征标的取值是某些特定的数，这一节中我



们确定了它存在的充要条件。另外， $\mathbf{IR}$ -表示的对偶表示会对应于相应的图同调群特征标的对偶。

4.6 节计算  $\tilde{A}_n$  型仿射 Weyl 群的  $\mathbf{IR}$ -表示，并证明了该群满足条件 (A1) 的不可约表示都是  $\mathbf{IR}$ -表示或它的商，即  $\mathbf{R}$ -表示。这个命题的证明不仅适用于更多的一些 Coxeter 群上，更重要的是，该证明本质上出现了图的基本群的作用，而带有至少两个回路的图的基本群是非交换的自由群。如果 Coxeter 图中带有至少两个回路，我们可以借助非交换自由群的无穷维不可约表示来构造出相应的 Coxeter 群的无穷维不可约表示，见 4.7 节。

4.8 节去掉图中带有两个回路的条件，减弱为带有至少一个回路，但假设 Coxeter 图中某条边带有大于 3 的标记。借鉴  $\mathbf{IR}$ -表示构造的思路，我们利用图的万有覆盖构造出相应 Coxeter 群的无穷维不可约表示。整个第 4 章的主要想法都是从二面体子群的表示出发，利用这些子群的表示“粘”成整个 Coxeter 群的表示。最后我们猜测，一个 Coxeter 群没有无穷维不可约表示等价于它是有限群或仿射 Weyl 群，并给出一个秩为 3 且 Coxeter 图不带回路的群的无穷维不可约表示的例子。

第 5 章考虑秩为 3 的 Coxeter 群几何表示的张量积的半单分解。在几何表示下，除了几个有限型和仿射型之外，其他群在  $GL_3(\mathbb{C})$  中的像的 Zariski 闭包都是  $A_1$  型的简约群  $O_3(\mathbb{C})$ ，从而根据 Chevalley 的定理推出几何表示张量积的分解基本上遵循 Clebsch-Gordan 法则，见 5.4.4 和 5.6.1。5.3 节对该分解和双线性型的关係做了一些探讨和猜测。

5.5 节以一个简单的秩 3 Coxeter 群为例，计算它的胞腔和基环等结构，并计算它的几何表示张量积半单分解中出现的各直和分量上的具体作用，确定它们所对应的双边胞腔。另外证明了两个  $\alpha$ -函数有界的 Coxeter 群的自由积也是  $\alpha$ -函数有界的。

### 1.3 一些约定

若不特别说明，线性空间或线性表示等的基域为复数域  $\mathbb{C}$ 。

记号  $|X|$  表示集合  $X$  的基数 (cardinality)。

若不特别说明，模 (或表示) 总是指左模。

对 Coxeter 系统  $(W, S)$  总是假定  $|S| < \infty$ ，且除了特别说明的情形外，一般只考虑不可约的  $(W, S)$ ，即 Coxeter 图 (Coxeter graph) 连通。

符号  $e$  表示群中的单位元。直立罗马体的  $i$  表示虚数单位。

自然数集  $\mathbb{N}$  中包含 0，不含 0 的正整数集记为  $\mathbb{N}_{>0}$ 。

$A^T$  表示矩阵  $A$  的转置，上标  $T$  置于右上角，而非左上角。

记号  $\square$  表示证明的结束。

定理或段落等的引用格式为：章序号.节序号.定理或段落序号，如 2.1.3。行间公式的引用格式为：(章序号.公式序号)，如 (2.2)。参考文献的引用格式为：[文献编号]，如 [24]。

## 第 2 章 Kazhdan-Lusztig 理论的若干基础知识

Kazhdan-Lusztig 多项式、胞腔等理论已问世四十余年。在其发展过程中，因为不同的使用需求，自然地出现了含义略有差别的多种符号体系。为明确本文所使用的符号含义，我们在本章中回顾一些基本概念。特别地，Coxeter 群的胞腔与它的表示关系密切。其中有一个双边胞腔较为简单，记作  $\mathcal{C}_1$ ，和它相关的表示将是本文重点考察的对象。最后，我们以二面体群为例做相关的计算。

### 2.1 胞腔, $a$ -函数

在这一节中我们回顾 Coxeter 群和 Hecke 代数的基本知识，包括 Kazhdan-Lusztig 基和多项式、胞腔等内容。更多内容可参见 [8, 20, 24, 30, 31, 34] 等。

**定义 2.1.1** 设  $S$  为有限集 (一般地  $S$  可为任意集合, 本文只考虑  $S$  有限的情形), 任给  $s, t \in S$ , 设  $m_{st} = m_{ts} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , 满足  $m_{ss} = 1$ , 而当  $s \neq t$  时,  $m_{st} \geq 2$ 。由  $S$  中的元素生成群  $W$ , 遵循如下关系,

$$(st)^{m_{st}} = e, \quad \forall s, t \in S.$$

称  $(W, S)$  为 Coxeter 系统, 不引起歧义时, 也简称  $W$  为 Coxeter 群。若  $m_{st} = \infty$ , 则视为不对  $st$  作要求。 $S$  中的元素称为单反射,  $|S|$  称为  $W$  的秩。

按如下方式构造一个图 (graph)。以  $S$  为顶点集, 若  $m_{st} \geq 3$ , 则连接  $s$  和  $t$  为一条边, 并标注  $m_{st}$ 。当  $m_{st} = 3$  时, 为简洁也可省略该标注。这个图称为  $(W, S)$  的 Coxeter 图。显然 Coxeter 图和 Coxeter 系统一一对应。若该图连通, 则称  $(W, S)$  不可约。

任一  $w \in W$  可写为单反射的乘积,  $w = s_1 \cdots s_n$ ,  $s_i \in S$ , 称为  $w$  的一个表达,  $n$  称为该表达的长度。 $w$  的所有表达长度的最小值记为  $\ell(w)$ , 称作  $w$  的长度, 相应的最短表达 (可能不唯一) 称作  $w$  的既约表达 (reduced expression)。若  $w = s_1 \cdots s_n$  既约,  $y = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ , 其中  $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ , 则称  $y \leq w$ 。这定义了  $W$  上的一个偏序 (partial order), 称为 Bruhat 序。称

$$\mathcal{L}(w) = \{s \in S \mid sw < w\}, \quad \mathcal{R}(w) = \{s \in S \mid ws < w\}$$

分别为  $w$  的左、右下降集。

$S$  的任一子集  $I$  在  $W$  中生成的子群称为抛物子群 (parabolic subgroup), 记为  $W_I$ 。

我们需要用到关于既约表达的如下事实, 可参见 [34, Theorem 1.9]。

**引理 2.1.2** (1) 设  $w \in W$ ,  $s_1 \cdots s_n$  和  $s'_1 \cdots s'_n$  是  $w$  的两个既约表达, 那么可通过有限多次形如

$$\underbrace{rtr \cdots}_{m_{rt} \text{ 项乘积}} = \underbrace{trt \cdots}_{m_{rt} \text{ 项乘积}} \quad (m_{rt} < \infty)$$

的变换将  $s_1 \cdots s_n$  变换为  $s'_1 \cdots s'_n$ 。

- (2) 设  $w \in W$ ,  $s_1 \cdots s_n$  为  $w$  的一个既约表达。则  $w$  的既约表达唯一当且仅当对任意  $r, t \in S$ , 在  $s_1 \cdots s_n$  中不存在一段连乘积形如

$$\underbrace{rtr \cdots}_{m_{rt} \text{ 项乘积}} \quad (m_{rt} < \infty).$$

记  $\mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}]$  为不定元  $q^{\frac{1}{2}}$  的复系数 Laurent 多项式环。

**定义 2.1.3** 给定 Coxeter 系统  $(W, S)$ , 以集合  $\{T_w \mid w \in W\}$  为基生成一个自由  $\mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}]$  模  $\mathcal{H}(W, S)$ , 简记为  $\mathcal{H}$ , 并线性地定义乘法,

$$\begin{aligned} T_s T_w &= T_{sw}, \quad \text{若 } s \in S, \ell(sw) = \ell(w) + 1, \\ T_s T_w &= (q-1)T_w + qT_{sw}, \quad \text{若 } s \in S, \ell(sw) = \ell(w) - 1. \end{aligned}$$

在该乘法下  $\mathcal{H}$  构成一个含么结合代数, 称为  $(W, S)$  的 Hecke 代数, 可视为群代数  $\mathbb{C}[W]$  的  $q$ -形变。若有交换环的同态  $\mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}] \rightarrow A$ , 做系数变换  $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}]} A$ , 简记为  $\mathcal{H}^A$ 。为方便使用, 记

$$\tilde{T}_w := q^{-\frac{\ell(w)}{2}} T_w.$$

在  $\mathcal{H}$  上有一个对合的环同态, 定义为

$$\bar{\cdot} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad q^{\frac{1}{2}} \mapsto q^{-\frac{1}{2}}, \quad \tilde{T}_w \mapsto \tilde{T}_{w^{-1}}^{-1}.$$

故事的精彩内容发端于如下定理。

**定理 2.1.4** (见 [24, Theorem 1.1]) 对任意  $y, w \in W$ , 存在唯一的  $q$  的多项式  $P_{y,w} \in \mathbb{Z}[q]$ , 满足如下条件,

- (1) 若  $y \not\leq w$ , 则  $P_{y,w} = 0$ ,
- (2)  $P_{w,w} = 1$ ,
- (3) 若  $y < w$ , 则  $\deg_q P_{y,w} \leq \frac{1}{2}(\ell(w) - \ell(y) - 1)$ ,
- (4) 若令  $C_w, C'_w \in \mathcal{H}$  为如下的元素,

$$\begin{aligned} C_w &= \sum_{y \in W} (-1)^{\ell(w) + \ell(y)} q^{\frac{1}{2}(\ell(w) - \ell(y))} \overline{P_{y,w} \tilde{T}_y}, \\ C'_w &= \sum_{y \in W} q^{-\frac{1}{2}(\ell(w) - \ell(y))} P_{y,w} \tilde{T}_y, \end{aligned}$$

则  $\overline{C_w} = C_w$ ,  $\overline{C'_w} = C'_w$ 。

人们将  $P_{y,w}$  称为 Kazhdan-Lusztig 多项式。  $\{C_w \mid w \in W\}$  和  $\{C'_w \mid w \in W\}$  各自构成  $\mathcal{H}$  的一组  $\mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}]$ -基, 都称为 Kazhdan-Lusztig 基。它们和标准基  $\{\tilde{T}_w \mid w \in W\}$  之间有如下的转换关系。

**引理 2.1.5** (1)  $C_w \in \tilde{T}_w + q^{\frac{1}{2}} \sum_{y < w} \mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}] \tilde{T}_y$ ,  $\tilde{T}_w \in C_w + q^{\frac{1}{2}} \sum_{y < w} \mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}] C_y$ 。

$$(2) C'_w \in \tilde{T}_w + q^{-\frac{1}{2}} \sum_{y < w} \mathbb{Z}[q^{-\frac{1}{2}}] \tilde{T}_y, \quad \tilde{T}_w \in C'_w + q^{-\frac{1}{2}} \sum_{y < w} \mathbb{Z}[q^{-\frac{1}{2}}] C'_y.$$

在  $\mathcal{H}$  上有另一对合的环同态  $\Phi$ , 定义为

$$\Phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad q^{\frac{1}{2}} \mapsto -q^{\frac{1}{2}}, \quad \tilde{T}_w \mapsto \tilde{T}_{w^{-1}}^{-1}.$$

直接验证可得如下引理, 它给出了两组 Kazhdan-Lusztig 基的关系。

**引理 2.1.6**  $\Phi(C_w) = C'_w$ 。

**例 2.1.7** (1)  $C_e = C'_e = T_e$ 。

$$(2) \text{ 设 } s \in S, C_s = \tilde{T}_s - q^{\frac{1}{2}}, C'_s = \tilde{T}_s + q^{-\frac{1}{2}}.$$

**定义 2.1.8** 设  $y, w \in W$ 。

- (1) 若  $y < w$  且  $\deg_q P_{y,w} = \frac{1}{2}(\ell(w) - \ell(y) - 1)$ , 则称  $y \prec w$ 。此时记  $P_{y,w}$  的最高次项系数 (非零) 为  $\mu(y, w)$ 。
- (2) 若  $w \prec y$ , 则定义  $\mu(y, w) = \mu(w, y)$ 。
- (3) 若  $y \not\prec w$  且  $w \not\prec y$ , 则定义  $\mu(y, w) = 0$ 。

在如上的记号下, Kazhdan-Lusztig 多项式满足如下性质。

**命题 2.1.9** 设  $s \in S, y, w \in W$ 。

- (1) 若  $y \leq w$ , 取  $q = 0$ , 有  $P_{y,w}(0) = 1$ 。
- (2) 若  $y \leq w$  且  $\ell(w) - \ell(y) \leq 2$ , 则  $P_{y,w} = 1$ 。
- (3) 若  $sw < w$ , 则有

$$P_{y,w} = q^{1-c} P_{sy,sw} + q^c P_{y,sw} - \sum_{\substack{z \prec sw \\ sz < z}} \mu(z, sw) q^{\frac{1}{2}(\ell(w) - \ell(z))} P_{y,z}$$

其中  $c = 0$  如果  $y < sy$ , 而  $c = 1$  如果  $sy < y$ 。由此得到 Kazhdan-Lusztig 多项式的递归算法。

- (4) 若  $y \leq w, sw < w$ , 则  $P_{y,w} = P_{sy,w}$ 。
  - (5) 若  $W$  为有限 Coxeter 群,  $w_0$  为其最长元, 由上一条可知  $P_{y,w_0} = 1, \forall y$ 。
- 在  $\mathcal{H}$  上有  $\mathbb{C}[q^{\pm\frac{1}{2}}]$  代数的反同态

$$\Psi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad \tilde{T}_w \mapsto \tilde{T}_{w^{-1}},$$

可验证  $\Psi$  与环同态  $-$  交换, 从而  $\Psi(C_w) = C_{w^{-1}}, \Psi(C'_w) = C'_{w^{-1}}$ , 因此

$$(6) P_{y,w} = P_{y^{-1},w^{-1}}.$$

**推论 2.1.10**  $s, y, w$  如上, 若  $y < w, s \in \mathcal{L}(w) \setminus \mathcal{L}(y)$ , 那么  $y \prec w$  当且仅当  $w = sy$ 。此时  $\mu(y, w) = 1$ 。

Kazhdan-Lusztig 基有如下的乘法关系。

**命题 2.1.11** 设  $s \in S, w \in W$ , 则

$$\begin{aligned} C_s C_w &= -(q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}) C_w, & \text{若 } sw < w, \\ C_s C_w &= C_{sw} + \sum_{\substack{y \prec w \\ sy < y}} \mu(y, w) C_y, & \text{若 } sw > w. \end{aligned}$$

将环同态  $\Phi$  作用在这些等式上，并注意到  $\mu(y, w) \in \mathbb{Z}$ ，由 2.1.6 可得到  $C'_s C'_w$  的表达式。由  $\Psi$  作用可得到  $C_w C_s$  与  $C'_w C'_s$  的类似公式。

由  $C_s = q^{-\frac{1}{2}} T_s - q^{\frac{1}{2}}$  将 2.1.11 重写为

**命题 2.1.11'** 设  $s \in S$ ,  $w \in W$ ，则

$$\begin{aligned} T_s C_w &= -C_w, & \text{若 } sw < w, \\ T_s C_w &= q C_w + q^{\frac{1}{2}} C_{sw} + q^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{y < w \\ sy < y}} \mu(y, w) C_y, & \text{若 } sw > w. \end{aligned}$$

**2.1.12** 为说话方便，定义一些记号，指代  $\mathcal{H}$  中的结构常数。设  $x, y \in W$ ，记

$$\tilde{T}_x \tilde{T}_y = \sum_{z \in W} f_{x,y,z} \tilde{T}_z, \quad C_x C_y = \sum_{z \in W} h_{x,y,z} C_z, \quad C'_x C'_y = \sum_{z \in W} h'_{x,y,z} C'_z.$$

其中  $f_{x,y,z}, h_{x,y,z}, h'_{x,y,z} \in \mathbb{Z}[q^{\pm\frac{1}{2}}]$ 。由 2.1.6 知  $\Phi(h'_{x,y,z}) = h_{x,y,z}$ 。这里不得不提 Kazhdan-Lusztig 正性猜想。在 [25] 中，Kazhdan 和 Lusztig 证明了，当  $W$  为 Weyl 群或仿射 Weyl 群时，多项式  $P_{y,w}$  的系数等于相应的 Schubert 簇的各阶相交上同调 (intersection cohomology) 的维数，特别地，都是非负整数。他们猜测该正性对于一般的 Coxeter 群都成立。对于  $W$  是晶体的 (crystallographic) 的情形，即  $m_{st} = 2, 3, 4, 6, \infty, \forall s, t \in S$ ，该结论在数年后被 Lusztig, Tits 等人证明。同时，Springer 等人的工作把  $\mathcal{H}$  中的乘法翻译为层的张量积，从而推导出在上述情形下各  $h'_{x,y,z}$  系数的正性。相关介绍可参见 [30, §3]。

对一般的 Coxeter 群，该猜想直到 2012 年才被 Elias 和 Williamson 证明。他们在文章 [15] 中把  $C'_w$  翻译为相应的 Soergel 双模的特征 (character)，而乘法对应于模的张量积，从而完整地解决了正性猜想。下文中会多次享受到这个正性给我们提供的便利。

**定理 2.1.13**  $\forall x, y, z \in W, P_{x,y} \in \mathbb{N}[q], h'_{x,y,z} \in \mathbb{N}[q^{\pm\frac{1}{2}}]$ 。

对元素的长度作归纳，由定义直接验证可得如下事实。

**引理 2.1.14** (1) 对任意的  $x, y, z \in W, f_{x,y,z} \in \mathbb{N}[\xi], h_{x,y,z}, h'_{x,y,z} \in \mathbb{Z}[\eta]$ ，其中  $\xi = q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}, \eta = q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}$ 。

(2) 若  $x = y^{-1}$ ，则  $f_{x,y,e} = 1$ ，否则  $f_{x,y,e} = 0$ 。

**引理 2.1.15** 设  $y, w \in W$ ，以下各项等价：

(1) 存在  $W$  中的元素序列  $x_0 = y, x_1, \dots, x_n = w$ ，使得对任意的  $i, \mathcal{L}(x_{i-1}) \not\subseteq \mathcal{L}(x_i)$ ，且要么  $x_{i-1} \prec x_i$ ，要么  $x_i \prec x_{i-1}$ 。

(1') 存在  $W$  中的元素序列  $x_0 = y, x_1, \dots, x_n = w$ ，使得对任意的  $i$ ，存在  $s_i \in S$ ，在  $C'_{s_i} C'_{x_i}$  关于基  $\{C'_z | z \in W\}$  的线性组合中， $C'_{x_{i-1}}$  的系数非零，即  $h'_{s_i, x_i, x_{i-1}} \neq 0$ 。

(2) 存在某  $a \in \mathcal{H}$ ，使得在  $a C_w$  关于基  $\{C_z | z \in W\}$  的线性组合中， $C_y$  的系数非零。

- (2') 存在某  $a \in \mathcal{H}$ , 使得在  $aC'_w$  关于基  $\{C'_z | z \in W\}$  的线性组合中,  $C'_y$  的系数非零。
- (3) 存在某  $x \in W$ , 使得在  $C_x C_w$  关于基  $\{C_z | z \in W\}$  的线性组合中,  $C_y$  的系数非零, 即  $h_{x,w,y} \neq 0$ 。
- (3') 存在某  $x \in W$ , 使得在  $C'_x C'_w$  关于基  $\{C'_z | z \in W\}$  的线性组合中,  $C'_y$  的系数非零, 即  $h'_{x,w,y} \neq 0$ 。

证明中用到了正性猜想的成立的事实。该证明取自 [1, Lemma 5.3]。

证明: 由 2.1.6 知 (2) 和 (2') 等价, (3) 和 (3') 等价。(3) 推 (2) 不需说明。(2) 推 (3) 也是简单的, 把  $a$  写成基  $\{C_z | z \in W\}$  的线性组合, 可知 (3) 成立。

假设 (1) 成立, 任取  $s_i \in \mathcal{L}(x_{i-1}) \setminus \mathcal{L}(x_i)$ 。若  $x_i \prec x_{i-1}$ , 由 2.1.10 可知  $x_{i-1} = s_i x_i$ , 此时根据 2.1.11 有  $h_{s_i, x_i, x_{i-1}} \neq 0$ 。若  $x_{i-1} \prec x_i$ , 同样由 2.1.11 知  $h_{s_i, x_i, x_{i-1}} \neq 0$ 。于是 (1') 成立。假设 (1') 成立, 在删去序列  $x_0, \dots, x_n$  中相邻且重复的项后, 类似地可推出 (1), 因此 (1) 和 (1') 等价。

若 (2') 成立, 注意到  $\{C'_s | s \in S\}$  生成整个  $\mathcal{H}$ , 把  $a$  写成如下形式,

$$a = \sum_{(i_1, \dots, i_r)} a_{i_1, \dots, i_r} C'_{s_{i_1}} \cdots C'_{s_{i_r}}, \quad a_{i_1, \dots, i_r} \in \mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}],$$

不妨设  $y \neq w$ , 否则 (1') 平凡地成立, 那么在某个  $C'_{s_1} \cdots C'_{s_n} C'_w$  ( $n \geq 1$ ) 关于基  $\{C'_z | z \in W\}$  的线性组合中,  $C'_y$  的系数非零。把  $C'_{s_2} \cdots C'_{s_n} C'_w$  写成  $\{C'_z | z \in W\}$  的线性组合, 可知其中有某个  $C'_{x_1}$  具有非零系数, 且  $C'_y$  出现在  $C'_{s_1} C'_{x_1}$  关于  $\{C'_z | z \in W\}$  的线性组合中。归纳地得到满足 (1') 要求的元素序列。因此 (2') 推出 (1')。

假设 (1') 成立, 由 2.1.13 归纳地可知  $C'_{x_{i-1}}$  出现在  $C'_{s_i} \cdots C'_{s_n} C'_w$  的关于基  $\{C'_z | z \in W\}$  的线性组合中。特别地, 取  $i = 0$ , (2') 成立。  $\square$

**定义 2.1.16** (1) 若  $y, w \in W$  满足 2.1.15 中的几个等价条件, 则称  $y \leq_L w$ 。

(2) 若  $y^{-1} \leq_R w^{-1}$ , 则称  $y \leq_R w$ 。

(3) 若存在序列  $x_0 = y, x_1, \dots, x_n = w \in W$ , 使得对任意的  $i$ , 有  $x_{i-1} \leq_L x_i$  或者  $x_{i-1} \leq_R x_i$ , 则称  $y \leq_{LR} w$ 。

$\leq_L, \leq_R, \leq_{LR}$  分别定义了  $W$  上的一个预序 (preorder)。

(4) 若  $y \leq_L w$  且  $w \leq_L y$ , 则称  $y \sim_L w$ 。类似地定义  $y \sim_R w$  和  $y \sim_{LR} w$ 。

(5)  $\sim_L$  定义了  $W$  上的一个等价关系, 其等价类称为左胞腔 (left cell)。类似地由  $\sim_R$  定义右胞腔 (right cell), 由  $\sim_{LR}$  定义双边胞腔 (two-sided cell)。

胞腔有如下性质。

**命题 2.1.17** 设  $y, w \in W$ 。

(1) 若  $y \leq_L w$ , 则  $\mathcal{R}(y) \supseteq \mathcal{R}(w)$ 。若  $y \sim_L w$ , 则  $\mathcal{R}(y) = \mathcal{R}(w)$ 。

(2) 若  $y \leq_R w$ , 则  $\mathcal{L}(y) \supseteq \mathcal{L}(w)$ 。若  $y \sim_R w$ , 则  $\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(w)$ 。

(3)  $\{e\}$  构成一个最高的双边胞腔, 对任意的  $w \in W$ ,  $w \underset{\text{LR}}{\leq} e$ 。

为研究 (仿射) Weyl 群和 Hecke 代数的结构和表示, Lusztig 引入了  $\mathbf{a}$ -函数的工具, 我们将在本节和 2.2、2.3 节中看到它的重要性。

**2.1.18** 在  $\mathbb{C}[q^{\pm\frac{1}{2}}]$  上定义一个“赋值”  $\mathbf{v}$  如下。对  $f \in \mathbb{C}[q^{\pm\frac{1}{2}}]$ , 记

$$\mathbf{v}(f) = \max \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid q^{-\frac{1}{2}n} f \in \mathbb{C}[q^{\frac{1}{2}}] \right\}.$$

当  $f \neq 0$  时,  $\mathbf{v}(f)$  即  $f$  关于  $q^{\frac{1}{2}}$  的最低次数。我们有

- (1)  $\mathbf{v}(0) = +\infty$ 。
- (2)  $\mathbf{v}(fg) = \mathbf{v}(f) + \mathbf{v}(g)$ ,  $\forall f, g \in \mathbb{C}[q^{\pm\frac{1}{2}}]$ 。
- (3)  $\mathbf{v}(f+g) \geq \min\{\mathbf{v}(f), \mathbf{v}(g)\}$ ,  $\forall f, g \in \mathbb{C}[q^{\pm\frac{1}{2}}]$ 。

**定义 2.1.19** 对  $w \in W$ , 定义  $\mathbf{a}$ -函数

$$\mathbf{a}(w) = \max \{ -\mathbf{v}(h_{x,y,w}) \mid x, y \in W \}.$$

称  $W$  的  $\mathbf{a}$ -函数有界, 如果存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得  $\mathbf{a}(w) \leq N$ ,  $\forall w \in W$ 。称  $W$  有界, 如果它的  $\mathbf{a}$ -函数有界, 且上界可以取为  $(W, S)$  的有限抛物子群的最长元长度的最大值。

$\mathbf{a}(w)$  刻画了 Kazhdan-Lusztig 基的结构常数中  $C_w$  的系数的极点 (pole) 的最高阶。  $\mathbf{a}$ -函数有以下性质。

**命题 2.1.20** (1)  $\forall w \in W$ ,  $\mathbf{a}(w) \in \mathbb{N}$ , 且  $\mathbf{a}(w) \leq \ell(w) - 2 \deg_q P_{e,w}$ 。

- (2)  $\mathbf{a}(w) = 0$  当且仅当  $w = e$ 。
- (3)  $\mathbf{a}(w) = \mathbf{a}(w^{-1})$ ,  $\forall w \in W$ 。
- (4) 若  $y, w \in W$  满足  $y \underset{\text{LR}}{\leq} w$ , 则  $\mathbf{a}(y) \geq \mathbf{a}(w)$ 。从而当  $y \underset{\text{LR}}{\sim} w$  时,  $\mathbf{a}(y) = \mathbf{a}(w)$ 。因此对一个胞腔  $\mathcal{C}$ , 我们可以谈论  $\mathbf{a}(\mathcal{C})$ 。
- (5)  $\mathbf{a}$ -函数的有界性等价于  $-\mathbf{v}(f_{x,y,w})$  的有界性。更精确地,  $-\mathbf{v}(h_{x,y,w}) \leq N$ ,  $\forall x, y, w \in W$  当且仅当  $-\mathbf{v}(f_{x,y,w}) \leq N$ ,  $\forall x, y, w \in W$ 。
- (6) 若  $W$  的  $\mathbf{a}$ -函数有界,  $y, w \in W$  满足  $\mathbf{a}(y) = \mathbf{a}(w)$  且  $y \underset{\text{L}}{\leq} w$  (或  $y \underset{\text{R}}{\leq} w$ ,  $y \underset{\text{LR}}{\leq} w$ ), 则  $y \underset{\text{L}}{\sim} w$  (或  $y \underset{\text{R}}{\sim} w$ ,  $y \underset{\text{LR}}{\sim} w$ )。
- (7) 设  $w$  为某个有限抛物子群的最长元, 则  $\mathbf{a}(w) = \ell(w)$ 。

上述部分重要结论的证明依赖于  $h'_{x,y,z}$  系数的正性。因此在早年的论文中, 如 [30, 31] 等, Lusztig 只考虑晶体的 Coxeter 群, 见 2.1.12。正性猜想被证明后, 这些结果中的晶体性假设便可去掉。

作为推论,  $\mathbf{a}$ -函数有界的 Coxeter 群的等价关系  $\underset{\text{LR}}{\sim}$  由  $\underset{\text{L}}{\sim}$  和  $\underset{\text{R}}{\sim}$  生成。一个更强的叙述见 2.3.6。

**推论 2.1.21** 如果  $W$  的  $\mathbf{a}$ -函数有界, 那么  $x \underset{\text{LR}}{\sim} y$  当且仅当存在  $W$  中的元素序列  $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ , 使得  $x_{i-1} \underset{\text{L}}{\sim} x_i$  或  $x_{i-1} \underset{\text{R}}{\sim} x_i$ ,  $\forall i$ 。

当  $(W, S)$  不可约时，下面的命题刻画了一个特殊的双边胞腔，参见 [29, Proposition 3.8]。

**引理 2.1.22** 设  $(W, S)$  不可约。

(1) 对任意的  $s \in S$ ，记

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &:= \{w \in W \mid w \neq e, \text{ 且 } w \text{ 的既约表达唯一}\}, \\ \Gamma_s &:= \{w \in \mathcal{C}_1 \mid \mathcal{R}(w) = \{s\}\}, \end{aligned}$$

则  $\mathcal{C}_1$  构成  $W$  中的一个双边胞腔， $\Gamma_s$  构成  $W$  的一个左胞腔。 $\mathcal{C}_1$  为所有  $\Gamma_s$  ( $s \in S$ ) 的不交并。

(2)  $\mathcal{C}_1 = \{w \in W \mid \mathbf{a}(w) = 1\}$ 。对任意  $x \in W \setminus \{e\}$ ，有  $x \leq_{\text{LR}} \mathcal{C}_1$ 。

**证明：** (1) 的证明见 [29, Proposition 3.8]。

对任意的  $s \in S$ ，显然有  $s \in \mathcal{C}_1$ 。由 2.1.20，知  $\mathcal{C}_1 \subseteq \{w \in W \mid \mathbf{a}(w) = 1\}$ 。反之，设  $w \in W$  有多个不同的既约表达，根据 2.1.2，知  $w$  的既约表达中含有一段形如  $rtr \cdots$  的  $m_{rt}$  次连乘积 ( $r \neq t \in S$ ,  $m_{rt} < \infty$ )。由定义和 2.1.11 得到  $w \leq_{\text{LR}} rtr \cdots$  ( $m_{rt}$  项连乘)。而  $rtr \cdots$  是由  $r, t$  生成的有限二面体群  $\langle r, t \rangle$  的最长元。由 2.1.20 知  $\mathbf{a}(w) \geq 2$ 。□

**2.1.23** 一般地，设  $(W, S)$  的 Coxeter 图的连通分支分解为  $S = \sqcup_i S_i$ ，记  $S_i$  生成的抛物子群为  $W_i$ ，则  $W = \prod_i W_i$ ， $\mathcal{H}(W, S) = \prod_i \mathcal{H}(W_i, S_i)$  为直积。设  $w = \prod_i w_i \in W$ ，其中各  $w_i \in W_i$ ，则各  $w_i$  对应的 Kazhdan-Lusztig 基元素  $C_{w_i}$  是互相交换的。根据 2.1.4 的唯一性容易验证  $C_w = \prod_i C_{w_i}$ ，因此对  $y = \prod_i y_i \in W$ ，其中各  $y_i \in W_i$ ， $y \leq_{\text{LR}} w$  (或  $y \leq_{\text{L}} w$ ,  $y \leq_{\text{R}} w$ ) 当且仅当在各  $W_i$  中  $y_i \leq_{\text{L}} w_i$  (或  $y_i \leq_{\text{R}} w_i$ ,  $y_i \leq_{\text{LR}} w_i$ )。并且， $\mathbf{a}(w) = \sum_i \mathbf{a}(w_i)$ 。根据 2.1.22， $W$  的  $\mathbf{a}$ -函数值为 1 的双边胞腔与 Coxeter 图的连通分支自然地一一对应。

## 2.2 表示和胞腔

胞腔可以用来构造 Hecke 代数 (视为  $\mathbb{C}$  代数) 的表示。本节内容的参考文献有 [24, 30, 34] 等。

**2.2.1** 设  $A$  为一个交换的  $\mathbb{C}$  代数， $\mathcal{C}$  为  $W$  的一个双边胞腔。令  $\mathcal{J}_{\leq \mathcal{C}}^A$  为一个自由  $A$  模，以

$$\{[C_w] \mid w \leq_{\text{LR}} \mathcal{C}\}$$

为一组基。类似地令  $\mathcal{J}_{< \mathcal{C}}^A$  为  $\mathcal{J}_{\leq \mathcal{C}}^A$  的子  $A$  模，以

$$\{[C_w] \mid w \leq_{\text{LR}} \mathcal{C}, w \notin \mathcal{C}\}$$

为一组基。设  $\chi_1, \chi_2 : \mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}] \rightarrow A$  为两个代数同态。定义  $\mathcal{H}$  在  $\mathcal{J}_{\leq \mathcal{C}}^A$  上的左作用



和右作用如下, 设  $x, w \in W$ ,  $w \underset{\text{LR}}{\leq} C$ ,

$$C_x \cdot [C_w] := \sum_{y \in W} \chi_1(h_{x,w,y})[C_y],$$

$$[C_w] \cdot C_x := \sum_{y \in W} \chi_2(h_{w,x,y})[C_y].$$

由 2.1.16, 出现在求和式中的  $y$  满足  $y \underset{\text{LR}}{\leq} w$ , 上述作用是良定义的, 分别定义了  $\mathcal{J}_{\leq C}^A$  上的一个  $\mathcal{H}$  左模结构和一个  $\mathcal{H}$  右模结构,  $\mathcal{J}_{< C}^A$  为其子模。记商模为

$$\mathcal{J}_C^A := \mathcal{J}_{\leq C}^A / \mathcal{J}_{< C}^A,$$

把  $[C_w]$  在  $\mathcal{J}_C^A$  中的等价类记为  $J_w$ ,  $\mathcal{J}_C^A$  也为自由  $A$  模, 以

$$\{J_w \mid w \in C\}$$

为一组基。注意这些  $\mathcal{H}$ -模结构 ( $q$  的作用) 依赖  $\chi_1$  和  $\chi_2$ , 但在记号上为了简洁没有体现出来。当把  $A$  取为  $\mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}]$  时, 我们把  $\mathcal{J}_{\leq C}^{\mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}]}$ ,  $\mathcal{J}_C^{\mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}]}$  简记为  $\mathcal{J}_{\leq C}^q$ ,  $\mathcal{J}_C^q$  等。此时若取  $\chi_1, \chi_2$  为恒等映射, 它们是正则模  $\mathcal{H}$  的子模或子商 (subquotient)。根据需要有时也取  $\chi_2$  为同态  $q^{\frac{1}{2}} \mapsto 1$ , 此时称  $\mathcal{J}_C^q$  为一个  $\mathbb{C}[W]$  右模, 以示区别。

$\{\mathcal{H}_i := \sum_{a(C) \geq i} \mathcal{J}_{\leq C}^q\}_i$  给出了  $\mathcal{H}$  正则模的一个滤过。若  $W$  的  $\mathbf{a}$ -函数有界, 这个滤过是有限长的。这个滤过的分次模为各  $\mathcal{J}_C^q$  的直和, 记为  $\mathcal{J}^q$ 。在 2.3 节中我们将看到, 若  $W$  的  $\mathbf{a}$ -函数有界,  $\mathcal{J}^q$  上可赋予一个结合环结构, 且具有一个  $\mathbb{Z}$ -形式。

注意  $\mathcal{J}_{\leq C}^A$  上的  $\mathcal{H}$  左模结构和右模结构一般不交换, 但 Lusztig 利用 [27] 中的计算, 证明了:

**定理 2.2.2** (见 [27, Lemma 2.3], [30, Theorem 9.2])  $\mathcal{J}_C^A$  上  $\mathcal{H}$  的左作用和右作用交换, 即  $\mathcal{J}_C^A$  为  $\mathcal{H}$ - $\mathcal{H}$  双模。

这是一个非常重要的事实, 它允许我们把  $W$  的表示和  $\mathcal{H}$  的表示联系起来, 见 2.4.4。另外它对基环  $\mathcal{J}$  的定义和性质也是至关重要的, 见 2.3 节。在  $\mathcal{J}_C^A$  中考虑  $C_x \cdot J_w \cdot C_y$ , 其中  $w \in C$ , 容易知道 2.2.2 等价于如下式子。

**定理 2.2.2'** 对任意的  $z \in C$  (即  $z \underset{\text{LR}}{\sim} w$ ),

$$\sum_{v \in W} h_{x,w,v}(q_1) h_{v,y,z}(q_2) = \sum_{u \in W} h_{x,u,z}(q_1) h_{w,y,u}(q_2),$$

其中  $q_1, q_2$  为两个无关的不定元。(注意等号两端都是有限项求和, 且由 2.1.16 知出现在求和式中的  $v$  和  $u$  都落在  $C$  中。)

**注 2.2.3** 在 2.2.2 的证明中,  $\mathbf{a}$ -函数起到了相当重要的作用。在 Lusztig 找到  $\mathbf{a}$ -函数这个工具之前, 他在 [27] 中对该定理 (只考虑 Weyl 群) 的证明使用了包络代数

本原理想的理论和 Kazhdan-Lusztig 关于李代数 Verma 模中单模重数的猜想 (见 [24, Conjecture 1.5]) 成立的事实。而这个猜想的证明使用了反常层等不平凡的几何工具, 见 [6, 9]。

设  $V$  是一个  $A$ -模,  $V$  上的一个 (左)  $\mathcal{H}$ -模结构是指一个代数同态  $\mathcal{H} \rightarrow \text{End}_A(V)$ , 且限制到  $\mathbb{C}[q^{\pm\frac{1}{2}}]$  上是一个  $\mathbb{C}$  代数同态  $\mathbb{C}[q^{\pm\frac{1}{2}}] \rightarrow A$ 。

假设  $W$  的  $\mathbf{a}$ -函数有界, 此时 Hecke 代数的每个非零单模  $V$  都对应到一个双边胞腔  $\mathcal{C}_V$ , 更准确地说, 可实现为  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}_V}^q$  (视为  $\mathcal{H}$  左模) 的商:

**命题 2.2.4** 设  $(W, S)$  的  $\mathbf{a}$ -函数有界。设  $V$  是  $\mathcal{H}$  的一个非零单模, 则存在唯一的双边胞腔  $\mathcal{C}$ , 使得对某个  $w \in \mathcal{C}$ ,  $C_w$  在  $V$  上的作用非零, 而对任意的  $x \in W$ , 若  $C_x$  的作用非零, 则  $\mathcal{C} \leq_{\text{LR}} x$ 。  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}^q$  到  $V$  有一个满同态, 即  $V$  可实现为  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}^q$  的商模。

证明: 由于  $V$  不是零模, 存在元素  $w \in W$  (如幺元  $e$ ), 使得  $C_w$  非零地作用在  $V$  上。若  $y \leq_{\text{LR}} w$ ,  $y \approx_{\text{LR}} w$ , 且  $C_y$  作用非零, 根据 2.1.20 (6), 有严格的不等式  $\mathbf{a}(y) > \mathbf{a}(w)$ 。由于  $\mathbf{a}$ -函数有界, 存在满足如下性质的双边胞腔  $\mathcal{C}$  (例如取  $\mathcal{C}$  为满足条件 (1) 的双边胞腔中  $\mathbf{a}$ -函数最大的一个):

- (1)  $\exists w \in \mathcal{C}$ ,  $C_w$  非零地作用在  $V$  上,
  - (2)  $\forall y \leq_{\text{LR}} \mathcal{C}$ , 若  $y \notin \mathcal{C}$ , 则  $C_y$  作用为零。
- ... (2.1)

设  $w \in \mathcal{C}$ ,  $v \in V$  满足  $C_w \cdot v \neq 0$ 。固定一个这样的  $v$ , 考虑如下映射

$$\varphi: \mathcal{J}_{\mathcal{C}}^q \rightarrow V, \quad J_y \mapsto C_y \cdot v.$$

由  $\mathcal{C}$  的选取,  $\varphi$  定义了一个非零的  $\mathcal{H}$  模同态, 从而是满射, 且  $V \simeq \mathcal{J}_{\mathcal{C}}^q / \text{Ker } \varphi$ 。假设有另一个双边胞腔  $\mathcal{C}'$ , 以及  $x \in \mathcal{C}'$ , 使得  $C_x$  在  $V$  上的作用非零, 则存在  $y \in \mathcal{C}$ ,  $C_x \cdot J_y \neq 0$ , 即存在  $z \in \mathcal{C}$ , 使得  $h_{x,y,z} \neq 0$ 。由 2.1.16,  $\mathcal{C} \leq_{\text{LR}} \mathcal{C}'$ 。在  $\mathcal{C} \neq \mathcal{C}'$  的前提下,  $\mathcal{C}'$  不满足条件 (2.1) 中的第二条。因此  $\mathcal{C}$  是唯一满足条件 (2.1) 的双边胞腔。同时也看出, 若  $C_x$  作用非零, 则  $\mathcal{C} \leq_{\text{LR}} x$ 。  $\square$

**注 2.2.5** 在证明中,  $\mathbf{a}$ -函数的有界性只用来保证  $\mathcal{C}$  的存在性。一般地若不假设  $\mathbf{a}$ -函数有界, 如果存在满足条件 (2.1) 的双边胞腔  $\mathcal{C}$ , 则单模  $V$  是  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}^q$  的商。反之, 若单模  $V$  是  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}^q$  的商, 则  $\mathcal{C}$  满足条件 (2.1)。且若  $C_x \cdot V \neq 0$  则有  $\mathcal{C} \leq_{\text{LR}} x$ 。从证明中可以看出这样的双边胞腔是唯一的 (如果存在)。

**2.2.6** 我们有一个  $\mathbb{C}$  代数的满同态  $\mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}[W]$  把  $q^{\frac{1}{2}}$  映为 1,  $\tilde{T}_w$  映为  $w$ 。任给一个  $W$  的表示  $V$ , 通过该同态拉回可将  $V$  视为一个  $\mathcal{H}$  模。如果  $V$  是  $W$  的不可约表示, 则作为  $\mathcal{H}$  模还是个单模。例如,  $W$  的平凡表示  $\mathbf{1}$  在 2.2.4 的意义下对应到双边胞腔  $\{e\}$ , 这是因为对任意  $s \in S$ ,  $C_s = \tilde{T}_s - q^{\frac{1}{2}}$  在平凡表示上作用都为零。而根据 2.1.11 和 2.1.15, 任何  $w \neq e$ , 有  $w \leq_{\text{LR}} s$  且  $C_w$  在平凡表示上作用

为零。特别地，由 2.1.4 中  $C_w$  的表达式，得到

$$\sum_{y \in W} (-1)^{\ell(y)} P_{y,w}(1) = 0, \quad \forall w \in W \setminus \{e\}.$$

(关于平凡表示的这些讨论以及该等式的正确性不需要  $\mathbf{a}$ -函数有界的假设。)

记  $\varepsilon$  为  $W$  的符号表示，即  $s \mapsto -1 \in \mathbb{C}, \forall s \in S$ 。由 2.1.4 中  $C_w$  的表达式，对任意的  $w \in W$ ， $C_w$  在符号表示上的作用为数乘

$$\sum_{y \in W} (-1)^{\ell(w)+\ell(y)} P_{y,w}(1) (-1)^{\ell(y)} = (-1)^{\ell(w)} \sum_{y \in W} P_{y,w}(1).$$

注意到系数的正性 2.1.13，该数乘非零。设  $\varepsilon$  对应的双边胞腔为  $\mathcal{C}$ ，由 2.2.4，有  $\mathcal{C} \leq_{\text{LR}} w, \forall w \in W$ 。这意味着  $\mathcal{C}$  是  $W$  最低 (在胞腔的偏序  $\leq_{\text{LR}}$  的意义下) 的双边胞腔。

**定理 2.2.7** 设  $(W, S)$  的  $\mathbf{a}$ -函数有界，则在关系  $\leq_{\text{LR}}$  下， $W$  中有一个最低双边胞腔  $\mathcal{C}_{\text{低}}$ 。设  $N$  为  $W$  上  $\mathbf{a}$ -函数的最大值，则  $\mathcal{C}_{\text{低}} = \{w \in W \mid \mathbf{a}(w) = N\}$ 。

证明：前半部分在上文中已证， $\mathcal{C}_{\text{低}}$  即符号表示  $\varepsilon$  对应的双边胞腔。后半部分由 2.1.20 可得。  $\square$

**注 2.2.8** 席南华在 [43] 中证明了有界的 Coxeter 群 (即  $\mathbf{a}$ -函数的上界为有限抛物子群最长元长度的最大值，见 2.1.19) 中存在最低双边胞腔，并给出一个刻画：

设  $W$  有界， $w_0$  为所有有限抛物子群最长元中的长度最大者 (之一)，则包含  $w_0$  的双边胞腔是  $W$  的最低双边胞腔，它由所有  $\mathbf{a}(w) = \ell(w_0)$  的元素  $w$  组成。

某种意义上，2.2.7 给出了最低双边胞腔存在性的另一个证明，但条件和结论稍弱。

在 2.2.4 的考虑中，也可将  $\{C_w \mid w \in W\}$  换为另一组基  $\{C'_w \mid w \in W\}$ 。它们有如下关系。

**引理 2.2.9** 设  $(V, \rho)$  为  $W$  的一个表示，将表示  $\rho \otimes \varepsilon$  的承载空间自然地等同于  $V$ 。通过  $q^{\frac{1}{2}} \mapsto 1$  将  $(V, \rho)$  和  $(V, \rho \otimes \varepsilon)$  视为  $\mathcal{H}$  模。则

$$\rho(C_w) = (-1)^{\ell(w)} (\rho \otimes \varepsilon)(C'_w).$$

特别地， $C_w$  在模  $(V, \rho)$  上作用为零当且仅当  $C'_w$  在模  $(V, \rho \otimes \varepsilon)$  上作用为零。

证明：由  $C_w$  和  $C'_w$  的定义，

$$\begin{aligned} \rho(C_w) &= \rho \left( \sum_y (-1)^{\ell(w)+\ell(y)} q^{\frac{1}{2}(\ell(w)-\ell(y))} P_{y,w}(q^{-1}) \tilde{T}_y \right) \\ &= \sum_y (-1)^{\ell(w)+\ell(y)} P_{y,w}(1) \rho(y), \\ \rho \otimes \varepsilon(C'_w) &= \rho \otimes \varepsilon \left( \sum_y q^{-\frac{1}{2}(\ell(w)-\ell(y))} P_{y,w}(q) \tilde{T}_y \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_y (-1)^{\ell(y)} P_{y,w}(1) \rho(y) \\
&= (-1)^{\ell(w)} \rho(C_w). \quad \square
\end{aligned}$$

### 2.3 基环 $\mathcal{J}$

在本节中我们将看到，对  $\mathbf{a}$ -函数有界的  $W$  的双边胞腔  $\mathcal{C}$ ，在模  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}^A$  上有一个(不一定含幺元的)环结构，称为这个双边胞腔的(系数在  $A$  上的)基环。它对 Hecke 代数的表示的研究具有重要的意义。本节内容的参考文献有 [31, 34] 等。

**2.3.1** 考虑到 2.1.20 (1)，可定义

$$\mathcal{D} = \{w \in W \mid \mathbf{a}(w) = \ell(w) - 2 \deg_q P_{e,w}\}.$$

称  $\mathcal{D}$  中的元素为特异对合元 (distinguished involution)，有些文献也称之为 Duflo 对合。同时，对任意的  $x, y, z \in W$ ，可定义  $\gamma_{x,y,z}$  为多项式  $q^{\frac{\mathbf{a}(z)}{2}} h'_{x,y,z^{-1}}$  的常数项，它是一个自然数(可能为零)。

**例 2.3.2**  $\mathcal{C}_1$  如 2.1.22，则  $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{D} = S$ 。

**命题 2.3.3** 设  $d \in \mathcal{D}$ ， $x, y, z \in W$ 。

- (1)  $d^2 = e$  (所以称之为特异对合)。
- (2) 若  $\gamma_{x,y,d} \neq 0$ ，则  $y = x^{-1}$ ，且  $\gamma_{x,x^{-1},d} = 1$ 。
- (3) 对任意  $x$ ，存在唯一的  $d \in \mathcal{D}$ ，使得  $\gamma_{x,x^{-1},d} \neq 0$ 。

以下假设  $W$  的  $\mathbf{a}$ -函数有界。

- (4)  $\gamma_{x,y,z} = \gamma_{y,z,x} = \gamma_{z,x,y}$ 。
- (5) 设  $\Gamma$  为  $W$  的左胞腔，则  $\Gamma$  含有唯一的特异对合  $d \in \mathcal{D}$ ，且对任意的  $x \in \Gamma$ ，有  $\gamma_{x^{-1},x,d} \neq 0$ 。

从 2.1.16 和定义可以知道，当  $\gamma_{x,y,z} \neq 0$  时，我们有  $z^{-1} \underset{L}{\leq} y$ ， $z^{-1} \underset{R}{\leq} x$ 。事实上我们可以知道更多：

- (6) 若  $\gamma_{x,y,z} \neq 0$ ，则  $x \underset{L}{\sim} y^{-1}$ ， $y \underset{L}{\sim} z^{-1}$ ， $z \underset{L}{\sim} x^{-1}$ 。

**2.3.4** 在本节剩余内容中，假设  $W$  的  $\mathbf{a}$ -函数有界。设  $\mathcal{C}$  为  $W$  的双边胞腔， $y \in \mathcal{C}$ ， $x \in W$ ，考虑  $C_x$  在  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}^q$  上的作用，

$$C_x \cdot J_y = (-1)^{\mathbf{a}(\mathcal{C})} q^{-\frac{\mathbf{a}(\mathcal{C})}{2}} \sum_{z \in \mathcal{C}} \left( \gamma_{x,y,z^{-1}} + q^{\frac{1}{2}} \text{的正幂次项} \right) J_z.$$

在等式右侧，若不考虑公共的因子  $(-1)^{\mathbf{a}(\mathcal{C})} q^{-\frac{\mathbf{a}(\mathcal{C})}{2}}$ ，当  $q$  趋于零时，括号中的系数只剩下  $\gamma_{x,y,z^{-1}}$ 。由 2.3.3 可知，只有当  $x \in \mathcal{C}$  时， $\gamma_{x,y,z^{-1}}$  才有可能非零。据此我们定义一个带有二元运算的集合如下。令  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$  为一个自由 Abel 群，以  $\{J_w \mid w \in \mathcal{C}\}$  为一组基，其上的二元运算由下式线性地定义，(可视为  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}^q$  上的模结构在  $q$  趋于零时的一种极限)

$$J_x J_y := \sum_{z \in \mathcal{C}} \gamma_{x,y,z^{-1}} J_z, \quad \forall x, y \in \mathcal{C}.$$

根据 Hecke 代数的结合性, 以及 2.3.3, Lusztig 证明了

**引理 2.3.5** (1)  $\mathcal{J}_C$  在上述定义下是一个结合环, 称为双边胞腔  $C$  的基环。

(2) 若  $C$  中只含有限多个左胞腔, 即  $C \cap D$  有限, 则  $\sum_{d \in C \cap D} J_d$  为  $\mathcal{J}_C$  的么元。

对所有的双边胞腔取环的直和  $\mathcal{J} := \bigoplus_C \mathcal{J}_C$ , 称为  $W$  的基环, 可视为  $\mathcal{H}$  的一个近似, 因此也称为渐进 Hecke 代数 (asymptotic Hecke algebra)。同样的, 若  $W$  只含有限多个左胞腔 (例如有有限 Coxeter 群, 仿射 Weyl 群等), 则  $\sum_{d \in D} J_d$  为  $\mathcal{J}$  的么元。注意  $\mathcal{J}$  在基  $\{J_w \mid w \in C\}$  下的结构常数都为非负整数。

基环的结构可以用来刻画胞腔和特异对合元, 下面命题取自 [33]。

**引理 2.3.6** (1)  $x \underset{L}{\sim} y$  当且仅当  $J_x J_{y^{-1}} \neq 0$ 。

(2)  $x \underset{LR}{\sim} y$  当且仅当存在  $z \in W$ , 使得  $J_x J_z J_y \neq 0$ , 也等价于  $x \underset{L}{\sim} z^{-1} \underset{R}{\sim} y$ 。

(3) 设  $\Gamma$  为一个左胞腔,  $d \in \Gamma$ 。  $d$  是  $\Gamma$  中的特异对合元当且仅当  $J_x J_d = J_x$ ,  $\forall x \in \Gamma$ 。

证明: (1) 充分性由 2.3.3 (6) 得到。反之, 设  $x \underset{L}{\sim} y$ , 记  $d$  为  $x, y$  所在左胞腔的特异对合元。计算

$$J_{x^{-1}} J_x J_{y^{-1}} J_y = \left( J_d + \sum_{z \neq d} \gamma_{x^{-1}, x, z} J_z \right) \left( J_d + \sum_{z \neq d} \gamma_{y^{-1}, y, z} J_z \right).$$

由于结构常数  $\gamma_{*,*,*}$  都是非负整数, 且  $J_d J_d = J_d$ , 因此上式不等于零, 特别地,  $J_x J_{y^{-1}} \neq 0$ 。

(2) 若存在  $z \in W$ , 使得  $J_x J_z J_y \neq 0$ , 根据 (1), 有  $x \underset{L}{\sim} z^{-1} \underset{R}{\sim} y$ 。若  $x \underset{L}{\sim} z^{-1} \underset{R}{\sim} y$ , 根据定义即有  $x \underset{LR}{\sim} y$ 。现在假设  $x \underset{LR}{\sim} y$ , 根据 2.1.21, 存在  $W$  中的一列元素  $\{x_i\}$ , 满足

$$x \underset{L}{\sim} x_1 \underset{R}{\sim} x_2 \underset{L}{\sim} \dots \underset{L}{\sim} x_n \underset{R}{\sim} y.$$

(可以假设  $\underset{L}{\sim}$  和  $\underset{R}{\sim}$  交替出现, 并且  $x \underset{L}{\sim} x_1$ , 否则若  $x \underset{R}{\sim} x_1$ , 可延长该序列为  $x \underset{L}{\sim} x \underset{R}{\sim} x_1 \underset{L}{\sim} \dots$ 。同理可假设  $x_n \underset{R}{\sim} y$ 。) 由 (1),  $J_x J_{x_1^{-1}} \neq 0$ , 并注意

$$J_x J_{x_1^{-1}} \in \sum_{w \underset{L}{\sim} x_1^{-1}} \mathbb{N} J_w,$$

因此和式中出现的  $w$  满足  $w \underset{L}{\sim} x_1^{-1}$ 。再次根据 (1), 知  $J_x J_{x_1^{-1}} J_{x_2} \neq 0$ 。依此类推, 归纳可知  $J_x J_{x_1^{-1}} J_{x_2} J_{x_3^{-1}} \cdots J_{x_n^{-1}} J_y \neq 0$ 。展开中间的  $n$  项乘积, 特别地, 存在  $z$  使得  $J_x J_z J_y \neq 0$ 。

(3) 必要性由 2.3.3 (2) (4) 得到。反之, 取  $x$  为  $\Gamma$  中的特异对合, 由  $J_x J_d = J_x$  得到  $\gamma_{x, d, x^{-1}} = 1$ , 而  $x$  是特异对合, 由 2.3.3 (2) (4) 知  $d = x$  为特异对合。  $\square$

**2.3.7** 顺带一提, 在 [33] 中, Lusztig 定义一个结合含么环为抽象基环如果它是自由 Abel 群, 附有一组  $\mathbb{Z}$ -基  $B$ , 使得对任意的  $b, b' \in B$ ,  $bb' \in \sum_{b'' \in B} \mathbb{N} b''$ 。

Lusztig 断言, 存在有限集  $B_0 \in B$ , 使得该环的么元  $1 = \sum_{b \in B_0} b$ 。但这是不对的。有一个简单的反例, 取  $B = \{x, y\}$ , 乘法可定义为

$$x^2 = x + y, \quad xy = yx = y, \quad y^2 = 0.$$

容易验证这是结合环, 么元为  $x - y$ 。这个错误不影响后续的结果。一个更精确的说法可参见 [44, §3.3]。

**2.3.8** 回忆 2.2.1 中  $A$  为交换的  $\mathbb{C}$  代数,  $\chi_1, \chi_2 : \mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}] \rightarrow A$  为代数同态, 并借此定义  $\mathcal{J}_C^A$  上的  $\mathcal{H}$  左、右模结构。作为自由  $A$  模,  $\mathcal{J}_C^A \simeq \mathcal{J}_C \otimes_{\mathbb{Z}} A$  (因此 2.3.5 说的是我们可赋予  $\mathcal{J}_C^A$  一个环结构, 且有一个  $\mathbb{Z}$ -形式)。已经知道当  $\mathcal{C}$  中只含有限多个左胞腔时,  $\mathcal{J}_C^A$  含有么元 1。自然地定义  $\varphi_C^A, \psi_C^A$ , 分别为  $\mathcal{H}$  左、右模的同态如下,

$$\begin{aligned} \varphi_C^A : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{J}_C^A, & C_x &\mapsto C_x \cdot 1 = \sum_{d \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}} \sum_{\substack{y \sim d \\ \text{LR}}} \chi_1(h_{x,d,y}) J_y, \\ \psi_C^A : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{J}_C^A, & C_x &\mapsto 1 \cdot C_x = \sum_{d \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}} \sum_{\substack{y \sim d \\ \text{LR}}} \chi_2(h_{d,x,y}) J_y. \end{aligned}$$

式中用点  $\cdot$  来表示  $\mathcal{H}$  左、右模的作用。若取  $A$  为  $\mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}]$ ,  $\chi_1, \chi_2$  为  $\mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}]$  上的恒等映射, 则简记为  $\varphi_C : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{J}_C^q$  和  $\psi_C : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{J}_C^q$ 。利用 2.2.2', 不难证明  $\mathcal{J}_C^A$  上的  $\mathcal{H}$  模结构与同态  $\varphi_C^A, \psi_C^A$  有如下关系。

**命题 2.3.9**  $C_x \cdot J_y = \varphi_C^A(C_x) J_y$ ,  $J_y \cdot C_x = J_y \psi_C^A(C_x)$ ,  $x \in W$ ,  $y \in \mathcal{C}$ 。等式左边的点  $\cdot$  为  $\mathcal{H}$  左、右模结构, 右边为  $\mathcal{J}_C^A$  中环的乘法。

**推论 2.3.10**  $\varphi_C^A$  和  $\psi_C^A$  是  $\mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}]$  代数的同态。

证明:  $\forall x, y \in W$ ,  $\varphi_C^A(C_x C_y) = (C_x C_y) \cdot 1 = C_x \cdot (C_y \cdot 1) = \varphi_C^A(C_x)(C_y \cdot 1) = \varphi_C^A(C_x) \varphi_C^A(C_y)$ 。关于  $\psi_C^A$  的证明类似。  $\square$

记  $\mathcal{J}^A := \mathcal{J} \otimes_{\mathbb{Z}} A$  为各  $\mathcal{J}_C^A$  的直和。若  $W$  只含有限多个左胞腔, 定义代数同态  $\varphi^A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{J}^A$  为各  $\varphi_C^A$  的直和,  $\psi^A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{J}^A$  为各  $\psi_C^A$  的直和。若取  $A$  为  $\mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}]$ ,  $\chi_1, \chi_2$  为  $\mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}]$  上的恒等映射, 则简记为  $\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{J}^q$  和  $\psi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{J}^q$ 。下面两个命题的证明见 [34, Proposition 18.12]。

**命题 2.3.11**  $\varphi$  和  $\psi$  为单同态。

**命题 2.3.12** 设  $N$  为  $W$  的  $\mathbf{a}$ -函数的上界, 则  $(\text{Ker } \varphi^A)^{N+1} = (\text{Ker } \psi^A)^{N+1} = 0$ 。

**2.3.13** 与 2.2.4 类似,  $\mathcal{J}^A$  的任意单模也对应唯一一个双边胞腔  $\mathcal{C}$ 。设  $M$  为  $\mathcal{J}^A$  的一个单模, 任取  $v \in M \setminus \{0\}$ , 记  $\mathfrak{m}$  为  $v$  的零化子, 则  $\mathfrak{m}$  为  $\mathcal{J}^A$  的极大左理想,  $M \simeq \mathcal{J}^A / \mathfrak{m}$ 。注意  $\mathcal{J}^A = \bigoplus_{\mathcal{C}} \mathcal{J}_C^A$ ,  $\mathcal{C}$  跑遍所有双边胞腔, 其中各  $\mathcal{J}_C^A$  为  $\mathcal{J}^A$  的双边理想。存在双边胞腔  $\mathcal{C}$ , 使得  $\mathcal{J}_C^A \not\subseteq \mathfrak{m}$ , 则  $\mathcal{J}_C^A + \mathfrak{m} = \mathcal{J}^A$ 。对其他双边胞腔  $\mathcal{C}'$ , 只能有  $\mathcal{J}_{C'}^A \subseteq \mathfrak{m}$ 。因此  $M$  为  $\mathcal{J}_C^A$  的商, 其他  $\mathcal{J}_{C'}^A$  在  $M$  上的作用都为零。

## 2.4 有限 Coxeter 群及其 Hecke 代数的表示

在这一节中，我们假设  $W$  为有限的 Coxeter 群，这包括 Weyl 群，有限二面体群，和两个孤立的情形，记为  $H_3, H_4$ ，见 [20, Ch. 2]。此时  $\mathfrak{a}$ -函数的有界性、左胞腔数量的有限性都自动满足。

**2.4.1** 记  $\mathbb{C}(q^{\frac{1}{2}})$  为  $\mathbb{C}[q^{\pm\frac{1}{2}}]$  的分式域。在 [27] 中，Lusztig 对 Weyl 群证明了群代数  $\mathbb{C}(q^{\frac{1}{2}})[W]$  和 Hecke 代数  $\mathcal{H}^{\mathbb{C}(q^{\frac{1}{2}})}$  同构，并具体地构造出该同构。如 2.2.3 所说，[27] 中的证明背后隐藏着 Kazhdan-Lusztig 猜想的正确性，这不是一个平凡的事实。而有了基环  $J$  的理论之后，我们可利用它搭起有限 Coxeter 群群代数和 Hecke 代数之间的桥梁。这里简单回顾一下，可参考 [34, §20]。

取  $\mathbb{C}[q^{\pm\frac{1}{2}}] \rightarrow \mathbb{C}(q^{\frac{1}{2}})$  为自然的嵌入。由 2.3.11 不难推出，代数的同态

$$\varphi^{\mathbb{C}(q^{\frac{1}{2}})} : \mathcal{H}^{\mathbb{C}(q^{\frac{1}{2}})} \rightarrow \mathcal{J}^{\mathbb{C}(q^{\frac{1}{2}})}$$

为单同态。由于维数相等， $\varphi^{\mathbb{C}(q^{\frac{1}{2}})}$  是一个同构。再取  $\mathbb{C}[q^{\pm\frac{1}{2}}] \rightarrow \mathbb{C}$  为  $q^{\frac{1}{2}} \mapsto 1$  所决定的同态，此时  $\mathcal{H}^{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C}[W]$  为半单的有限维代数，由 2.3.12 知同态

$$\varphi^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}[W] \rightarrow \mathcal{J}^{\mathbb{C}}$$

也是单同态。同样由维数知  $\varphi^{\mathbb{C}}$  为同构。类似地， $\psi^{\mathbb{C}}$  也为同构。将系数变换为  $\mathbb{C}(q^{\frac{1}{2}})$ ，得到同构

$$\varphi^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(q^{\frac{1}{2}}) : \mathbb{C}(q^{\frac{1}{2}})[W] \rightarrow \mathcal{J}^{\mathbb{C}(q^{\frac{1}{2}})}.$$

因此我们得到了  $\mathbb{C}(q^{\frac{1}{2}})[W]$  和  $\mathcal{H}^{\mathbb{C}(q^{\frac{1}{2}})}$  之间的同构。

**2.4.2** 设  $V$  为  $W$  的一个复表示，由同构  $\varphi^{\mathbb{C}}$  视为  $\mathcal{J}^{\mathbb{C}}$  的模。自然地把系数扩为  $\mathbb{C}[q^{\pm\frac{1}{2}}]$ ，记  $E := V \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[q^{\pm\frac{1}{2}}]$ ，则  $E$  是  $\mathcal{J}^q = \mathcal{J}^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[q^{\pm\frac{1}{2}}]$  的模。由同态  $\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{J}^q$  拉回，视  $E$  为  $\mathcal{H}$  的模。此时  $E$  是自由的  $\mathbb{C}[q^{\pm\frac{1}{2}}]$  模，秩等于  $\dim_{\mathbb{C}} V$ ，且如果把  $q^{\frac{1}{2}}$  取为 1，即通过  $q^{\frac{1}{2}} \mapsto 1$  做系数变换  $E \otimes_{\mathbb{C}[q^{\pm\frac{1}{2}}]} \mathbb{C}$ ，它上面的  $\mathcal{H}$  模结构成为一个  $\mathbb{C}[W]$  模结构，自然地同构于  $V$ 。若系数取  $\mathbb{C}(q^{\frac{1}{2}})$ ， $V \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(q^{\frac{1}{2}})$  还是  $\mathcal{H}^{\mathbb{C}(q^{\frac{1}{2}})}$  的单模。这给出了  $\mathcal{H}^{\mathbb{C}(q^{\frac{1}{2}})}$  的单模和  $W$  的不可约复表示的一一对应。为说话方便，定义下面的术语。

**定义 2.4.3** (该定义中不假设  $W$  为有限群) 设一个  $\mathcal{H}$  模  $E$  是一个自由  $\mathbb{C}[q^{\pm\frac{1}{2}}]$  模， $q^{\frac{1}{2}}$  在  $E$  上的作用为自然的数乘。通过  $q^{\frac{1}{2}} \mapsto 1$  作系数变换  $E \otimes_{\mathbb{C}[q^{\pm\frac{1}{2}}]} \mathbb{C}$ ，记为  $V$ 。由于  $q^{\frac{1}{2}}$  在  $V$  上的作用为 1， $V$  成为  $W$  的一个复表示。称  $\mathcal{H}$  模  $E$  为  $W$  的复表示  $V$  的一个  $q$ -形变。

从定义中可以看出，作为自由  $\mathbb{C}[q^{\pm\frac{1}{2}}]$  模， $E \simeq V \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[q^{\pm\frac{1}{2}}]$ ， $E$  的秩等于  $V$  的复维数。在这样的术语下，2.4.2 说的是对有限 Coxeter 群  $W$ ，每一个复表示都可构造  $q$ -形变。这种构造最早可能出现于 [32]。

**2.4.4** 回到  $W$  为有限 Coxeter 群的设定，设  $V$  为  $W$  的不可约复表示。这里回顾一下 [28] 介绍的另一种构造。由  $q^{\frac{1}{2}} \mapsto 1$  把  $V$  视为  $\mathcal{H}$  的单模，设  $\mathcal{C}$  为  $V$  在 2.2.4

意义下对应的双边胞腔。通过同构  $\varphi^{\mathcal{C}}$ ，把  $V$  视为  $\mathcal{J}^{\mathcal{C}}$  的单模，在 2.3.13 的意义下假设它对应到双边胞腔  $\mathcal{C}'$ 。注意

$$\varphi^{\mathcal{C}}(C_x|_{q^{\frac{1}{2}}=1}) = \sum_{d \in \mathcal{D}} \sum_{y \underset{\text{LR}}{\sim} d} h_{x,d,y}(1) J_y,$$

式中出现的  $y$  满足  $y \leq x$ ，若  $C_x$  在  $V$  上作用非零，则求和式中存在某个  $y$  使得  $J_y$  作用非零，因此  $\mathcal{C}' \leq \mathcal{C}$ 。把  $(\varphi^{\mathcal{C}})^{-1}(J_x)$  写成各  $C_y$  的线性组合，则有  $\mathbf{a}(x) \leq \mathbf{a}(y)$ ，类似地可推出  $\mathbf{a}(\mathcal{C}') \leq \mathbf{a}(\mathcal{C})$ 。由 2.1.20，可知  $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ 。如果通过同构  $\psi^{\mathcal{C}}$  把  $V$  视为  $\mathcal{J}^{\mathcal{C}}$  模，同样的论证表明它对应的双边胞腔也是  $\mathcal{C}$ 。

设  $\mathcal{C}''$  是不同于  $\mathcal{C}$  的双边胞腔， $1_{\mathcal{C}''}$  为  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}''}^{\mathcal{C}}$  的幺元。任取  $j \in \mathcal{J}_{\mathcal{C}''}^{\mathcal{C}}$ ，设  $\psi^{\mathcal{C}}(a) = j$ ， $a \in \mathbb{C}[W]$ ，则  $j = \psi_{\mathcal{C}''}^{\mathcal{C}}(a) = 1_{\mathcal{C}''} \cdot a$ 。在  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}''}^{\mathcal{C}} \otimes_{\mathbb{C}[W]} V$  中，

$$j \otimes V = 1_{\mathcal{C}''} \cdot a \otimes V = 1_{\mathcal{C}''} \otimes a \cdot V.$$

由上一段知， $a \cdot V = 0$ ，因此  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}''}^{\mathcal{C}} \otimes_{\mathbb{C}[W]} V = 0$ 。

在 2.2.1 中取  $\chi_1$  为  $\mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}]$  的恒等映射，而  $\chi_2$  为  $q^{\frac{1}{2}} \mapsto 1$ ，则根据 2.2.2， $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}^q$  成为一个  $\mathcal{H}\text{-}\mathbb{C}[W]$  双模。做张量积  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}^q \otimes_{\mathbb{C}[W]} V$ ，它是一个  $\mathcal{H}$  左模。作为  $\mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}]$  模， $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}^q \simeq \mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{J}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ ，根据 2.3.9， $\mathcal{H}$  和  $\mathbb{C}[W]$  分别通过同态  $\varphi$  和  $\psi^{\mathcal{C}}$  左、右作用于其上。因此，作为  $\mathcal{H}$  模，有同构

$$\mathcal{J}_{\mathcal{C}}^q \otimes_{\mathbb{C}[W]} V \simeq \mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{J}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \otimes_{\mathbb{C}[W]} V. \quad \dots (2.2)$$

由同态  $\varphi_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ ， $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \otimes_{\mathbb{C}[W]} V$  成为一个  $\mathbb{C}[W]$  左模。由  $\mathcal{C}$  的定义，容易验证下式是良定义的  $\mathbb{C}[W]$  模同态，且是非零的，因而是满同态，

$$\mathcal{J}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \otimes_{\mathbb{C}[W]} V \twoheadrightarrow V, \quad J_x \otimes v \mapsto C_x \cdot v. \quad \dots (2.3)$$

如果通过同构  $\psi^{\mathcal{C}}$  把  $\mathcal{J}^{\mathcal{C}}$  与  $\mathbb{C}[W]$  作为代数等同，则

$$(\mathcal{J}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \otimes_{\mathbb{C}[W]} V =) \mathcal{J}^{\mathcal{C}} \otimes_{\mathbb{C}[W]} V \simeq V.$$

从而维数相等，可知 (2.3) 式是同构 (但这两个同构并不一样)。由 (2.3) 式做系数变换，并代入 (2.2)，得到

$$\mathcal{J}_{\mathcal{C}}^q \otimes_{\mathbb{C}[W]} V \simeq \mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{J}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \otimes_{\mathbb{C}[W]} V \simeq \mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}] \otimes_{\mathbb{C}} V. \quad \dots (2.4)$$

其中第二个同构为  $\mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}][W]$  左模的同构。由 (2.4) 中的同构，并根据 2.3.9， $h \in \mathcal{H}$  在  $\mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{J}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \otimes_{\mathbb{C}[W]} V$  上的左作用等于  $\varphi(h) \in \mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{J}^{\mathcal{C}}$  的左乘，亦等于  $(\text{Id}_{\mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}]} \otimes \varphi^{\mathcal{C}^{-1}})(\varphi(h)) \in \mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}][W]$  的左作用。这表明，如果把  $\mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}] \otimes_{\mathbb{C}} V$  通过 2.4.2 的方式视为  $\mathcal{H}$  模，则 (2.4) 是  $\mathcal{H}$  模的同构，也就是说， $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}^q \otimes_{\mathbb{C}[W]} V$  也是  $V$  的  $q$ -形变，并且与 2.4.2 构造的  $E$  相同。

**命题 2.4.5**  $V, E$  如上。 $\mathbf{v}(\text{tr}(\tilde{T}_x, E)), \mathbf{v}(\text{tr}(C_x, E)) \geq -\mathbf{a}(\mathcal{C})$ ，更精确地，

$$\text{tr}(\tilde{T}_x, E) = (-1)^{\mathbf{a}(\mathcal{C})} \text{tr}(J_x, V) q^{-\frac{\mathbf{a}(\mathcal{C})}{2}} + q^{\frac{1}{2}} \text{的更高次项},$$



$$\mathrm{tr}(C_x, E) = (-1)^{a(C)} \mathrm{tr}(J_x, V) q^{-\frac{a(C)}{2}} + q^{\frac{1}{2}} \text{ 的更高次项.}$$

且存在  $x \in W$ , 使得  $\mathrm{tr}(J_x, V) \neq 0$ , 即  $a(C)$  为使得不等式成立的最小整数。

证明: 任意的  $x \in W$ ,  $C_x$  通过  $\varphi$  作用在  $E$  上, 而

$$\varphi(C_x) = \sum_{d \in \mathcal{D}} \sum_{\substack{y \sim d \\ \text{LR}}} h_{x,d,y} J_y,$$

因此

$$\mathrm{tr}(C_x, E) = \sum_{d \in \mathcal{D}} \sum_{\substack{y \sim d \\ \text{LR}}} h_{x,d,y} \mathrm{tr}(J_y, V).$$

注意到  $h_{x,d,y} = (-1)^{a(y)} \gamma_{x,d,y^{-1}} q^{-\frac{a(y)}{2}} + q^{\frac{1}{2}}$  的更高次项, 而  $\gamma_{x,d,y^{-1}} \neq 0$  当且仅当  $d \underset{\text{L}}{\sim} x$  并且  $y = x$ . 这样的  $d$  有且只有一个, 而且此时  $\gamma_{x,d,x^{-1}} = 1$ . 再考虑到若  $y \notin \mathcal{C}$  则  $J_y$  在  $V$  上作用为零, 因此

$$\mathrm{tr}(C_x, E) = (-1)^{a(C)} \mathrm{tr}(J_x, V) q^{-\frac{a(C)}{2}} + q^{\frac{1}{2}} \text{ 的更高次项.}$$

由 2.1.5,  $\tilde{T}_x \in C_x + q^{\frac{1}{2}} \sum_y \mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}] C_y$ , 因此

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\tilde{T}_x, E) &= \mathrm{tr}(C_x, E) + q^{\frac{1}{2}} \text{ 的高于 } -a(C) \text{ 次的一些项} \\ &= (-1)^{a(C)} \mathrm{tr}(J_x, V) q^{-\frac{a(C)}{2}} + q^{\frac{1}{2}} \text{ 的更高次项.} \end{aligned}$$

这证明了 2.4.5 的前半部分。

对  $d, d' \in \mathcal{D}$ ,  $J_d J_{d'} = \delta_{d,d'} J_d$ , 据此容易验证  $\mathcal{J}^C$  模  $V$  有子空间直和分解  $V = \bigoplus_{d \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}} J_d V$ , 并且对  $d \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}$ ,  $J_d$  在  $J_d V$  上为恒等作用, 在其他的  $J_{d'} V$  上作用为零。因此, 存在  $d \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}$ , 使得  $\mathrm{tr}(J_d, V) \neq 0$ .  $\square$

## 2.5 二面体群

二面体群是秩为 2 的 Coxeter 群。在这一节中, 我们计算二面体群  $D_\infty$  和  $D_m$  相应的 Kazhdan-Lusztig 基的全部乘法关系。

**2.5.1** 由定义, 无穷二面体群  $D_\infty = \langle r, t \mid r^2 = t^2 = e \rangle$ 。为方便, 记

$$r_k := \underbrace{rtr \cdots r}_{k \text{ 项乘积}}, \quad t_k := \underbrace{trt \cdots t}_{k \text{ 项乘积}}, \quad k^r := \underbrace{\cdots rtr}_{k \text{ 项乘积}}, \quad k^t := \underbrace{\cdots trt}_{k \text{ 项乘积}}.$$

在二面体群中  $y < w$  当且仅当  $\ell(y) < \ell(w)$ 。据此, 对  $\ell(w)$  作归纳, 由 2.1.9 中的递归公式可得  $P_{y,w} = 1, \forall y, w$ , 同时知道  $y < w$  当且仅当  $\ell(w) = \ell(y) + 1$ 。

**命题 2.5.2**  $\mathcal{H}(D_\infty)$  中 Kazhdan-Lusztig 基的结构常数如下,

- (1)  $C_{lr} C_{tl} = 2(C_{s_{2l}} + C_{s_{2l-2}} + \cdots + C_{s_2}) - C_{s_{2l}}, (l \geq 1)$
- (2)  $C_{lr} C_{tk} = C_{s_{k+l}} + 2(C_{s_{k+l-2}} + C_{s_{k+l-4}} + \cdots + C_{s_{k-l+2}}) + C_{s_{k-l}}, (k > l \geq 1)$
- (3)  $C_{lr} C_{rk} = -\eta(C_{s_{k+l-1}} + C_{s_{k+l-3}} + \cdots + C_{s_{k-l+1}}), (k \geq l \geq 1)$

其中  $\eta = q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}$ ,  $s = r$  或  $t$ , 取决于  $\mathcal{L}(lr) = \{s\}$ , 即  $lr$  的既约表达以  $s$  开头。对  $k < l$  的情形, 将 2.1.9 中的反同态  $\Psi$  作用到这些式子上即可。

证明: 对  $l$  作归纳。当  $l = 1$  时, 由 2.1.11 直接计算知命题成立。注意到  $C_{lr} = C_t C_r$ , 直接计算可验证  $l = 2$  的情形。下面假设  $l \geq 3$ , 由 2.1.11 此时有

$$C_{lr} = C_{l-1}t C_r - C_{l-2}r. \quad \dots (2.5)$$

代入 (1) (2) (3) 中,

$$\begin{aligned} C_{lr}C_{t_l} &= C_{l-1}t C_r C_{t_l} - C_{l-2}r C_{t_l}, \\ C_{lr}C_{t_k} &= C_{l-1}t C_r C_{t_k} - C_{l-2}r C_{t_k}, \quad (k > l) \\ C_{lr}C_{r_k} &= C_{l-1}t C_r C_{r_k} - C_{l-2}r C_{r_k}, \quad (k \geq l) \end{aligned}$$

注意到  $\mathcal{L}(l-2r) = \mathcal{L}(l-1t) = \mathcal{L}(lr) = \{s\}$ , 据归纳假设整理上述式子可得结论。□

**注 2.5.3** 利用同态  $\Phi$  (见 2.1.6) 便得到另一组基  $\{C'_w\}$  的乘法关系。

**2.5.4**  $D_\infty$  有两个双边胞腔,  $\{e\}$  和  $C_1$ 。由 2.5.2 可得到基环  $\mathcal{J}_{C_1}$  的结构。

$$\begin{aligned} J_{lr}J_{t_k} &= 0, & l, k \geq 1, \\ J_{lr}J_{r_k} &= J_{s_{k+l-1}} + J_{s_{k+l-3}} + \cdots + J_{s_{|k-l|+1}}, & k, l \geq 1, \quad \mathcal{L}(lr) = \{s\}. \end{aligned}$$

**2.5.5** 对正整数  $m \geq 2$ , ( $2m$  阶) 二面体群  $D_m = \langle r, t \mid r^2 = t^2 = (rt)^m = e \rangle$ 。采用 2.5.1 的记号, 特别地,  $r_m = t_m$  为最长元, 将其记为  $w_{rt}$ 。2.5.1 的讨论对  $D_m$  也成立。

**命题 2.5.6**  $\mathcal{H}(D_m)$  中 Kazhdan-Lusztig 基的结构常数如下,

- (1)  $C_{lr}C_{t_l} = 2(C_{s_{2l}} + C_{s_{2l-2}} + \cdots + C_{s_2}) - C_{s_{2l}}$ ,  
( $m \geq 2l \geq 2$ )
- (2)  $C_{lr}C_{t_l} = f_{2l-m}C_{r_m} - C_{s_{2m-2l}} + 2(C_{s_{2m-2l}} + C_{s_{2m-2l-2}} + \cdots + C_{s_2})$ ,  
( $2m > 2l \geq m+1$ )
- (3)  $C_{lr}C_{t_k} = C_{s_{k+l}} + 2(C_{s_{k+l-2}} + C_{s_{k+l-4}} + \cdots + C_{s_{k-l+2}}) + C_{s_{k-l}}$ ,  
( $k > l \geq 1, k+l \leq m$ )
- (4)  $C_{lr}C_{t_k} = f_{k+l-m}C_{r_m} + C_{s_{2m-k-l}} + 2(C_{s_{2m-k-l-2}} + \cdots + C_{s_{k-l+2}}) + C_{s_{k-l}}$ ,  
( $m > k > l \geq 2, k+l \geq m+1$ )
- (5)  $C_{lr}C_{r_k} = -\eta(C_{s_{k+l-1}} + C_{s_{k+l-3}} + \cdots + C_{s_{k-l+1}})$ ,  
( $k \geq l \geq 1, k+l \leq m$ )
- (6)  $C_{lr}C_{r_k} = f_{k+l-m}C_{r_m} - \eta(C_{s_{2m-k-l-1}} + \cdots + C_{s_{k-l+3}} + C_{s_{k-l+1}})$ ,  
( $m > k \geq l \geq 2, k+l \geq m+1$ )
- (7)  $C_{lr}C_{r_m} = f_l C_{r_m}$ , ( $m \geq l \geq 1$ )

其中  $\eta, s$  同 2.5.2,  $f_k$  为如下的多项式,

$$f_k = \sum_{i \geq 0, k-2i \geq 1} (-1)^{k-i} \binom{k-1-i}{i} \eta^{k-2i}.$$

证明: (1) (3) (5) 与 2.5.2 相同, 证明也是一样的. 利用 2.5.2 证明中的 (2.5) 式, 对  $l$  作归纳容易证明 (7). 下面对  $l$  归纳来证明条目 (4).

在条目 (4) 的情形, 只能有  $m \geq 4$ . 若  $l = 2$ , 则  $k = m - 1$ , 若  $l = 3$ , 则  $k = m - 1$  (此时  $m \geq 5$ ) 或  $k = m - 2$  (此时  $m \geq 6$ ), 这三种情况可直接计算验证. 现在考虑  $l \geq 4$ . 先假设  $k = m - 1$ , 由 (2.5) 式有

$$C_{lr}C_{t_{m-1}} = C_{l-1t}C_{r_m} + C_{l-1t}C_{r_{m-2}} - C_{l-2r}C_{t_{m-1}}. \quad \dots (2.6)$$

对第一项应用条目 (7) 的结论, 对后两项应用归纳假设 ( $l \geq 4$  保证了对后两项可以应用条目 (4) 的归纳假设), 知

$$\begin{aligned} (2.6) \text{ 式} &= f_{l-1}C_{r_m} + (f_{l-3}C_{r_m} + C_{s_{m-l+3}} + 2C_{s_{m-l+1}} + C_{s_{m-l-1}}) \\ &\quad - (f_{l-3}C_{r_m} + C_{s_{m-l+3}} + C_{s_{m-l+1}}) \\ &= f_{l-1}C_{r_m} + C_{s_{m-l+1}} + C_{s_{m-l-1}}. \end{aligned}$$

因此此时 (4) 成立. 再假设  $k \leq m - 2$ , 同样由 (2.5) 式,

$$C_{lr}C_{t_k} = C_{l-1t}C_{r_{k+1}} + C_{l-1t}C_{r_{k-1}} - C_{l-2r}C_{t_k}. \quad \dots (2.7)$$

对第一项可应用归纳假设, 对后两项需要讨论  $k + l - 2$  的值. 如果  $k + l - 2 \geq m + 1$ , 由归纳假设得到

$$\begin{aligned} (2.7) \text{ 式} &= f_{k+l-m}C_{r_m} + C_{s_{2m-k-l}} + 2(C_{s_{2m-k-l-2}} + \dots + C_{s_{k-l+4}}) + C_{s_{k-l+2}} \\ &\quad + f_{k+l-m-2}C_{r_m} + C_{s_{2m-k-l+2}} + 2(C_{s_{2m-k-l}} + \dots + C_{s_{k-l+2}}) + C_{s_{k-l}} \\ &\quad - f_{k+l-m-2}C_{r_m} - C_{s_{2m-k-l+2}} - 2(C_{s_{2m-k-l}} + \dots + C_{s_{k-l+4}}) - C_{s_{k-l+2}} \\ &= f_{k+l-m}C_{r_m} + C_{s_{2m-k-l}} + 2(C_{s_{2m-k-l-2}} + \dots + C_{s_{k-l+2}}) + C_{s_{k-l}}. \end{aligned}$$

如果  $k + l - 2 \leq m$ , 对 (2.7) 式的后两项应用条目 (3), 得到

$$\begin{aligned} (2.7) \text{ 式} &= f_{k+l-m}C_{r_m} + C_{s_{2m-k-l}} + 2(C_{s_{2m-k-l-2}} + \dots + C_{s_{k-l+4}}) + C_{s_{k-l+2}} \\ &\quad + C_{s_{k+l-2}} + 2(C_{s_{k+l-4}} + \dots + C_{s_{k-l+2}}) + C_{s_{k-l}} \\ &\quad - C_{s_{k+l-2}} - 2(C_{s_{k+l-4}} + \dots + C_{s_{k-l+4}}) - C_{s_{k-l+2}} \\ &= f_{k+l-m}C_{r_m} + C_{s_{2m-k-l}} + 2(C_{s_{2m-k-l-2}} + \dots + C_{s_{k-l+2}}) + C_{s_{k-l}}. \end{aligned}$$

因此对  $k \leq m - 2$  的情形条目 (4) 也成立. 条目 (4) 已完成.

对条目 (2) 和 (6) 也可类似验证, 限于篇幅不再赘述.  $\square$

**2.5.7**  $D_m$  有三个双边胞腔,  $\{e\}$ 、 $\mathcal{C}_1$  和最长元  $\{w_{rt}\}$ , 其中  $\mathbf{a}(w_{rt}) = m$ . 由 2.5.6 可得到基环  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}_1}$  的结构.

$$\begin{aligned} J_{lr}J_{t_k} &= 0, & m > l, k \geq 1, \\ J_{lr}J_{r_k} &= J_{s_{k+l-1}} + J_{s_{k+l-3}} + \dots + J_{s_{|k-l|+1}}, & k, l \geq 1, \quad k + l \leq m, \quad \mathcal{L}(lr) = \{s\}, \\ J_{lr}J_{r_k} &= J_{s_{2m-k-l-1}} + \dots + J_{s_{|k-l|+3}} + J_{s_{|k-l|+1}}, & m > k, l \geq 2, \quad k + l \geq m + 1, \quad \mathcal{L}(lr) = \{s\}. \end{aligned}$$

### 第 3 章 $a$ -函数值为 1 的表示

群  $W$  的表示等价于  $q^{\frac{1}{2}}$  作用为恒等映射的  $\mathcal{H}$  的表示。在这一章中，我们考虑满足如下条件的表示  $V$ ：若  $w \in W$ ， $\mathbf{a}(w) \geq 2$ ，则  $C_w$  在  $V$  上的作用为零。将这样的表示称为 A1-表示，在 3.3 节中我们利用  $W$  中的二面体群给出 A1-表示的一个刻画。特别地，Coxeter 群有一个自然的表示，称为几何表示，它满足这样的条件。

#### 3.1 Coxeter 群的几何表示

**定义 3.1.1** 给定一个 Coxeter 系统  $(W, S)$ ，令  $V_{\text{geom}}$  为一个  $\mathbb{C}$  线性空间，以

$$\{\alpha_s \mid s \in S\}$$

为一组基。在  $V_{\text{geom}}$  上定义如下的对称双线性型，

$$B(\alpha_s, \alpha_t) := -\cos \frac{\pi}{m_{st}}.$$

特别地， $B(\alpha_s, \alpha_s) = 1$ 。对任意的  $s \in S$ ， $v \in V_{\text{geom}}$ ，定义

$$s \cdot v := v - 2B(\alpha_s, v)\alpha_s.$$

它使  $V_{\text{geom}}$  成为  $W$  的一个表示，称为几何表示 (geometric representation)。有些文献也称之为 Tits 表示。

从定义中可以看出，该复表示有一个实形式  $V_{\text{geom}}^{\mathbb{R}} := \sum_s \mathbb{R}\alpha_s$ ，一般材料中都把几何表示直接定义在  $V_{\text{geom}}^{\mathbb{R}}$  上。我们为了方便，把它定义在复数域上。若把  $S$  写为  $\{s_1, s_2, \dots\}$ ，我们也把  $\alpha_{s_i}$  简记为  $\alpha_i$ 。

这里列出几个关于几何表示常用的性质，详见 [8, Ch.V §4] 或 [20, II §5]。

**命题 3.1.2** (1)  $V_{\text{geom}}$  是个忠实表示。

(2)  $B$  在  $W$  的作用下不变，即  $B(w \cdot v_1, w \cdot v_2) = B(v_1, v_2)$ ， $\forall w \in W$ ， $v_i \in V_{\text{geom}}$ 。

以下假设  $(W, S)$  不可约，即它的 Coxeter 图连通。

(3)  $W$  是有限群当且仅当  $B$  在  $V_{\text{geom}}^{\mathbb{R}}$  上的限制是正定的， $W$  是仿射 Weyl 群当且仅当  $B$  在  $V_{\text{geom}}^{\mathbb{R}}$  上的限制是退化半正定的。

(4)  $V_{\text{geom}}$  是不可约表示当且仅当  $B$  是非退化的双线性型。

(5) 若  $V_{\text{geom}}$  可约，记  $V_0 = \{v \in V_{\text{geom}} \mid B(v, V_{\text{geom}}) = 0\}$ ，则  $W$  平凡地作用在  $V_0$  上，且任何  $V_{\text{geom}}$  的真子表示都包含于  $V_0$  中。特别地， $V_{\text{geom}}/V_0$  是  $W$  的不可约表示。

(6)  $V_{\text{geom}}$  到自身的表示的同态只有数乘。

(7) 在相差一个数乘的意义下， $B$  是  $V_{\text{geom}}$  上唯一的在  $W$  作用下不变的对称双线性型。

(6) 和 (7) 的证明: 设  $\phi: V_{\text{geom}} \rightarrow V_{\text{geom}}$  为模同态, 对任意  $s \in S$ ,

$$s \cdot \phi(\alpha_s) = \phi(s \cdot \alpha_s) = -\phi(\alpha_s),$$

因此  $\phi(\alpha_s)$  是  $s$  作用的特征值为  $-1$  的特征向量。注意到  $s$  的特征值为  $-1$  的特征子空间维数为 1, 因此存在  $c_s \in \mathbb{C}$ , 使得  $\phi(\alpha_s) = c_s \phi(\alpha_s)$ 。设  $s, t \in S$  且  $m_{st} \geq 3$ ,

$$\begin{aligned} s \cdot \phi(\alpha_t) &= \phi(s \cdot \alpha_t) = \phi(\alpha_t - 2B(\alpha_t, \alpha_s)\alpha_s) = c_t \alpha_t - 2c_s B(\alpha_t, \alpha_s)\alpha_s \\ &= c_t(s \cdot \alpha_t) = c_t(\alpha_t - 2B(\alpha_t, \alpha_s)\alpha_s) \end{aligned}$$

由于  $B(\alpha_t, \alpha_s) \neq 0$ , 我们得到  $c_t = c_s$ 。而  $W$  的 Coxeter 图连通, 因此对任意的  $s, t \in W$ , 都有  $c_t = c_s$ , 即  $\phi$  为数乘。

设  $B'$  是另一个满足 (7) 中条件的双线性型。设  $s, t \in S$  在 Coxeter 图上相邻, 即满足  $m_{st} \geq 3$ 。根据双线性性展开下式, 并注意到  $\cos \frac{\pi}{m_{st}} \neq 0$ ,

$$B'(\alpha_t, \alpha_t) = B'(s \cdot \alpha_t, s \cdot \alpha_t) = B'(\alpha_t + 2 \cos \frac{\pi}{m_{st}} \alpha_s, \alpha_t + 2 \cos \frac{\pi}{m_{st}} \alpha_s),$$

可以得到

$$\cos \frac{\pi}{m_{st}} B'(\alpha_s, \alpha_s) + B'(\alpha_s, \alpha_t) = 0. \quad \dots (3.1)$$

同理,

$$\cos \frac{\pi}{m_{st}} B'(\alpha_t, \alpha_t) + B'(\alpha_t, \alpha_s) = 0.$$

因此我们得到

$$B'(\alpha_t, \alpha_t) = B'(\alpha_s, \alpha_s). \quad \dots (3.2)$$

由于 Coxeter 图连通, (3.2) 对所有的  $s, t \in S$  都成立。设  $B'(\alpha_s, \alpha_s) = c, \forall s \in S$ , (3.1) 告诉我们对任意相邻的  $s$  和  $t$ ,  $B'(\alpha_t, \alpha_s) = cB(\alpha_t, \alpha_s)$ 。

为说话方便, 对任意  $s, t \in S$ , 记  $d(s, t)$  为 Coxeter 图中连接  $s$  和  $t$  的最短路径的长度。这里路径 (path) 是指  $S$  中的序列  $s_0 = s, s_1, \dots, s_n = t$ , 满足  $m_{s_i s_{i+1}} \geq 3, \forall i$ , 并称  $n$  为该路径的长度。假设对于任意满足  $d(s, t) < n$  的  $s, t$ , 已有  $B'(\alpha_t, \alpha_s) = cB(\alpha_t, \alpha_s)$ 。现在考虑  $d(s, t) = n$  ( $n \geq 2$ ) 的情况。取连接  $s, t$  的一条最短路径  $s_0 = s, s_1, \dots, s_n = t$ , 那么

$$s_n s_{n-1} \cdots s_1 \cdot \alpha_s = \sum_{i=0}^n c_i \alpha_{s_i},$$

其中所有的系数  $c_i \neq 0$ 。如上展开,

$$\begin{aligned} B'(\alpha_s, \alpha_s) &= B'(\sum c_i \alpha_{s_i}, \sum c_i \alpha_{s_i}) \\ &= 2c_0 c_n B'(\alpha_s, \alpha_t) + \text{满足 } d(-, -) < n \text{ 的其他项.} \end{aligned}$$

该式对  $B$  也成立。由归纳假设, 我们得到  $B'(\alpha_s, \alpha_t) = cB(\alpha_s, \alpha_t)$ 。  $\square$

**3.1.3** 在基  $\{\alpha_s | s \in S\}$  下,  $B$  的表示矩阵为一个实对称阵, 因此该矩阵也定义了  $V_{\text{geom}}$  上的一个 Hermitian 型 (关于第一个变量线性, 第二个变量共轭线性; 关于两个变量共轭对称), 记为  $H$ 。由于在基  $\{\alpha_s | s \in S\}$  下  $W$  作用的表示矩阵皆为实矩阵,  $H$  也在  $W$  作用下不变。当  $B$  非退化时,  $H$  也非退化。  $H$  在实形式  $V_{\text{geom}}^{\mathbb{R}}$  上的限制等于  $B$ 。

与 3.1.2 (7) 相同的办法可证明, 在相差一个  $\mathbb{R}^\times$ -数乘的意义下,  $H$  是  $V_{\text{geom}}$  上唯一的  $W$ -不变的 Hermitian 型。从而可以知道, 若 Coxeter 群  $W$  是无限群, 则  $V_{\text{geom}}$  不是酉表示。

### 3.2 二面体群的表示

在这一节中我们回顾有限和无限二面体群的表示, 以供下文使用。

**3.2.1** 先考虑  $D_m = \langle r, t | r^2 = t^2 = (rt)^m = e \rangle$ 。记  $V = \mathbb{C}\beta_r \oplus \mathbb{C}\beta_t$ , 对任意的自然数  $1 \leq k \leq m/2$ , 定义  $D_m$  在  $V$  上的作用  $\rho_k : D_m \rightarrow \text{GL}(V)$  为

$$\begin{aligned} r \cdot \beta_r &= -\beta_r, & r \cdot \beta_t &= \beta_t + 2 \cos \frac{k\pi}{m} \beta_r, \\ t \cdot \beta_t &= -\beta_t, & t \cdot \beta_r &= \beta_r + 2 \cos \frac{k\pi}{m} \beta_t. \end{aligned}$$

直观上,  $r$  和  $t$  以两个反射作用在实平面上, 两条反射轴的夹角为  $k\pi/m$ , 将系数扩充到  $\mathbb{C}$  便得到  $\rho_k$ , 见图 3.1。

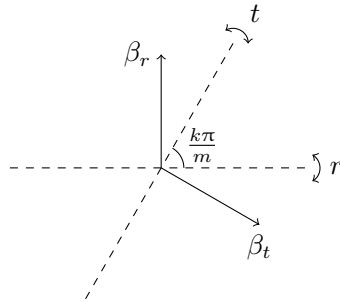


图 3.1:  $\rho_k : D_m \rightarrow \text{GL}(V)$

若  $k < m/2$ ,  $\rho_k$  是不可约表示。若  $m$  为偶数且  $k = m/2$ , 则  $\rho_{m/2} = \varepsilon_r \oplus \varepsilon_t$  分裂为两个一维表示的直和, 其中

$$\varepsilon_r : r \mapsto -1, t \mapsto 1; \quad \varepsilon_t : r \mapsto 1, t \mapsto -1.$$

如 2.2.6, 记  $\varepsilon$  为符号表示,  $\mathbf{1}$  为平凡表示, 那么  $D_m$  的所有不可约表示为

$$\begin{aligned} &\{\mathbf{1}, \varepsilon, \rho_1, \dots, \rho_{\frac{m-1}{2}}\}, \quad \text{若 } m \text{ 为奇数;} \\ &\{\mathbf{1}, \varepsilon, \varepsilon_r, \varepsilon_t, \rho_1, \dots, \rho_{\frac{m}{2}-1}\}, \quad \text{若 } m \text{ 为偶数。} \end{aligned}$$

**注 3.2.2** (1) 由 Schur 引理, 当  $k < m/2$  时,  $\rho_k$  的自同态必为数乘。这在第 4 章中会频繁地用到。

(2)  $r$  和  $t$  在  $\rho_k$  上的  $+1$ -特征子空间都是一维的, 但不重合, 即不存在非零向量同时被  $r$  和  $t$  固定。这个事实在第4章中将被用来证明不同二面体子群表示的“粘合”是可行的。

**3.2.3** 若  $1 \leq k < m/2$  (即  $\rho_k$  不可约时), 在  $\rho_k$  的表示空间  $V$  上有一个群作用不变的双线性型  $B$ , 在相差一个  $\mathbb{C}^\times$ -数乘的意义下唯一:

$$B(\beta_r, \beta_r) = B(\beta_t, \beta_t) = 1, \quad B(\beta_r, \beta_t) = B(\beta_t, \beta_r) = -\cos \frac{k\pi}{m}. \quad \dots (3.3)$$

特别地,  $B$  是对称的。

$V$  上的一个形式  $H: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  称为半双线性型如果它关于第一个变量线性而关于第二个变量共轭线性。记  $H$  为由 (3.3) 式定义的双线性型, 那么  $H$  在  $\rho_k$  作用下不变。若  $H'$  是另一个群作用不变的半双线性型, 则  $H'$  与  $H$  相差一个  $\mathbb{C}^\times$ -数乘。进一步,  $H'$  是 Hermitian 型 (即共轭对称) 当且仅当  $H'$  与  $H$  相差一个  $\mathbb{R}^\times$ -数乘。

**3.2.4** 若  $d > 1$  为  $k$  和  $m$  的公因子, 那么  $\rho_k$  经由  $D_{\frac{m}{d}}$  分解:

$$\begin{array}{ccc} D_m & \xrightarrow{\rho_k} & GL(V) \\ & \searrow & \nearrow \rho_{\frac{k}{d}} \\ & D_{\frac{m}{d}} & \end{array}$$

**3.2.5** 下面回顾  $D_\infty = \langle r, t \mid r^2 = t^2 = e \rangle$  的表示。它有四个一维表示, 分别为  $\mathbf{1}, \varepsilon, \varepsilon_r, \varepsilon_t$  (记号如 3.2.1)。

由下式定义  $D_\infty$  在  $V = \mathbb{C}\beta_r \oplus \mathbb{C}\beta_t$  上的表示, 记为  $\varrho_{x,y}$ :

$$r \mapsto \begin{pmatrix} -1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & -1 \end{pmatrix}$$

其中  $x, y \in \mathbb{C}$ 。为了和上文的  $\rho_k$  区分, 这里 (和下文) 使用变体的字母  $\varrho$ 。假设  $x, y, x', y' \in \mathbb{C}^\times$  非零, 以下事实成立:

- (1)  $\varrho_{x,y} \simeq \varrho_{x',y'}$  当且仅当  $xy = x'y'$ 。
- (2)  $\varrho_{xy}$  不可约当且仅当  $xy \neq 4$ 。若  $xy = 4$ ,  $\varrho_{x,y}$  同构于  $D_\infty$  的几何表示 (见 3.1 节), 也就是  $\varrho_{2,2}$ , 它是可约的。

为简化记号并消除歧义, 对每一  $z \in \mathbb{C}$ , 选取并固定  $u = u(z) \in \mathbb{C}$  使得  $u^2 = z$ , 并且若  $z \in \mathbb{R}^+$  则选取  $u = \sqrt{z} \in \mathbb{R}^+$ 。记

$$\varrho_z := \varrho_{u,u}.$$

若  $k, m \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq k < m/2$ , 当  $z = 4 \cos^2 \frac{k\pi}{m}$  时,  $\varrho_z$  经由  $D_m$  的表示  $\rho_k$  分解。若  $z = 4$ ,  $\varrho_4 = \varrho_{2,2}$  为几何表示。若  $z = 0$ ,  $\varrho_0 = \varrho_{0,0}$  同构于  $\varepsilon_r \oplus \varepsilon_t$ 。

此外, 记  $\varrho_r^t := \varrho_{1,0}$ ,  $\varrho_t^r := \varrho_{0,1}$ , 那么二者都是不可分解的表示。 $\varrho_r^t$  有子表示同构于  $\varepsilon_r$ , 相应的商表示同构于  $\varepsilon_t$ ; 而  $\varrho_t^r$  有子表示同构于  $\varepsilon_t$ , 其商同构于  $\varepsilon_r$ 。

除了上述的表示,  $D_\infty$  有另一个“异样的”二维表示 (本文中不会用到), 记为  $\varrho_\varepsilon^1: r \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . 它以  $\varepsilon$  为子表示, 商为  $\mathbb{1}$ .

在同构的意义下, 以上就是  $D_\infty$  所有维数不超过 2 的不可分解表示, 如下所列,

$$\{\mathbb{1}, \varepsilon, \varepsilon_r, \varepsilon_t, \varrho_r^t, \varrho_t^r, \varrho_\varepsilon^1\} \cup \{\varrho_z \mid z \in \mathbb{C}^\times\}.$$

其中包含了  $D_\infty$  所有不可约表示, 即

$$\{\mathbb{1}, \varepsilon, \varepsilon_r, \varepsilon_t\} \cup \{\varrho_z \mid z \in \mathbb{C}^\times \setminus \{4\}\}.$$

对任一不可分解的二维表示  $\varrho$ , 可验证:

- (3)  $\varrho$  的自同构只有数乘。
- (4) 在  $\varepsilon$  的表示空间  $V$  上有一个群作用不变的双线性型  $B$ , 且在相差一个数乘的意义下唯一。其表示矩阵为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{u}{2} \\ -\frac{u}{2} & 1 \end{pmatrix} & \text{若 } \varrho = \varrho_z, z \neq 0; \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{若 } \varrho = \varrho_t^r; \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{若 } \varrho = \varrho_r^t \text{ 或 } \varrho_\varepsilon^1. \end{cases}$$

### 3.3 双边胞腔 $C_1$ 和 A1-表示

如 2.2.6, 令  $q^{\frac{1}{2}}$  的作用为 1, 把  $W$  的任一表示  $V$  视为一个  $\mathcal{H}$  模。记  $w_{rt}$  为  $D_m = \langle r, t \rangle$  的最长元, 记号  $r_k, t_k$  如 2.5.1。记号  $\rho_k$  见 3.2.1。

**引理 3.3.1** 除了符号表示  $\varepsilon$ ,  $C_{w_{rt}}$  在  $D_m$  的其他不可约表示上的作用均为零。 $C_{w_{rt}}$  在  $\varepsilon$  上的作用为数乘  $(-1)^m \cdot 2m$ 。

**证明:** 对  $1 \leq k \leq m/2$ ,  $\rho_k$  为二维表示。在这个表示上,  $D_m$  中  $m$  个长度为偶数的元素的作用都为绕原点的旋转, 并且旋转的角度均匀地分布在圆周上, 因此这些旋转映射之和为零。 $D_m$  中剩下的  $m$  个元素长度为奇数, 在  $\rho_k$  上的作用为以上各旋转复合某一个 (固定的) 反射, 因此这些元素的作用之和也为零。由二面体群的结果, 已知

$$\begin{aligned} C_{r_m} &= \tilde{T}_{r_m} + (-1)^m q^{\frac{m}{2}} + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i q^{\frac{i}{2}} (\tilde{T}_{r_{m-i}} + \tilde{T}_{t_{m-i}}) \\ &= \tilde{T}_{r_m} - q^{\frac{1}{2}} (\tilde{T}_{r_{m-1}} + \tilde{T}_{t_{m-1}}) + \cdots + (-1)^{m-1} q^{\frac{m-1}{2}} (\tilde{T}_r + \tilde{T}_t) + (-1)^m q^{\frac{m}{2}}. \end{aligned}$$

从式中可以看出,  $C_{w_{rt}}$  在  $\rho_k$  上的作用为这些旋转之和与反射之和的差, 因此  $C_{w_{rt}}$  在  $\rho_k$  上的作用为零。特别地, 若  $m$  为偶数,  $\rho_{\frac{m}{2}} = \varepsilon_r \oplus \varepsilon_t$ ,  $C_{w_{rt}}$  在  $\varepsilon_r$  和  $\varepsilon_t$  上的作用为零。另外, 可直接验证  $C_{w_{rt}}$  在平凡表示  $\mathbb{1}$  上的作用为零, 在  $\varepsilon$  上的作用为数乘  $(-1)^m \cdot 2m$ 。以上讨论的便是  $D_m$  所有的不可约表示。  $\square$



**定理 3.3.2** 设  $V$  为  $W$  的一个表示, 那么, 对所有满足  $\mathbf{a}(w) > 1$  的  $w \in W$  都成立  $C_w \cdot V = 0$  当且仅当  $V$  满足以下条件,

(A1) 对任意两个互异的单反射  $r, t \in S$ , 若  $m_{rt} < \infty$ , 则不存在  $v \in V \setminus \{0\}$ , 使得  $r \cdot v = t \cdot v = -v$ .

为说话方便, 称这样的表示为 A1-表示。

证明: 设  $r \neq t \in S$ , 且  $m_{rt} = m < \infty$ , 记  $w_{rt} = rtr \cdots$  ( $m$  项乘积) 如上。将表示  $V$  限制到子群  $D_m = \langle r, t \rangle$  上, 则  $V$  (无论维数有限还是无穷) 分解为二面体群  $D_m$  的不可约表示的直和。若  $v \in V \setminus \{0\}$  张成同构于  $\varepsilon$  的子表示, 则由 3.3.1 知  $C_{w_{rt}} \cdot v \neq 0$ 。而根据 2.1.20 (7),  $\mathbf{a}(w_{rt}) = m > 1$ 。

反之, 设  $V$  满足条件 (A1)。由 2.1.22,  $\mathbf{a}(w) \geq 2$  当且仅当  $w$  有多个不同的既约表达。此时根据 2.1.2,  $w$  的既约表达形如

$$\cdots \underbrace{rtr \cdots}_{m_{rt} \text{ 项乘积}} \cdots \quad (m_{rt} < \infty).$$

对  $\ell(w)$  作归纳, 归纳的起点为所有形如  $w = w_{rt} = rtr \cdots$  ( $m_{rt}$  项乘积) 的元素, 这些情形已由 3.3.1 证明。一般地, 设  $w = xw_{rt}y$ ,  $m_{rt} < \infty$ , 且  $\ell(w) = \ell(x) + m_{rt} + \ell(y)$ 。若  $x \neq e$ , 取  $s \in S$  使得  $sx < x$ , 则  $sw < w$  且  $\mathbf{a}(sw) \geq 2$ 。根据 2.1.11 我们有

$$C_w = C_s C_{sw} - \sum_{\substack{y < sw \\ sy < y}} \mu(y, sw) C_y,$$

特别地, 出现在求和式中的  $y$  都满足  $y \leq sw$ , 从而  $\mathbf{a}(y) \geq \mathbf{a}(sw) \geq 2$ 。注意到  $\ell(y) < \ell(sw) < \ell(w)$ , 根据归纳假设,  $C_y$  和  $C_{sw}$  在  $V$  上的作用为零, 因此  $C_w$  作用也为零。  $\square$

**推论 3.3.3** 设  $w \in W$ ,  $\mathbf{a}(w) \geq 2$ , 则  $C_w$  在  $V_{\text{geom}}$  上的作用为零。

证明: 根据  $V_{\text{geom}}$  的定义, 容易验证它满足条件 (A1)。  $\square$

**推论 3.3.4** 设  $W$  不可约,  $V$  是  $W$  的不可约表示, 则  $V$  在 2.2.4 的意义下对应到双边胞腔  $\mathcal{C}_1$  当且仅当  $V$  不是平凡表示且满足条件 (A1)。

**推论 3.3.5** 若  $V$  是一个 A1-表示,  $U$  为子表示, 则商表示  $V/U$  也满足条件 (A1)。

证明: 若  $C_w$  在  $V$  上作用为零, 那么它在  $V/U$  上作用也为零。  $\square$

### 3.4 几何表示的 $q$ -形变

当  $W$  是有限 Coxeter 群时, 2.4 节对  $W$  的每个不可约表示都构造了一个  $q$ -形变。在本节中我们将看到, 相同的操作也能构造出  $V_{\text{geom}}$  的一个  $q$ -形变, 同时, 这个  $q$ -形变与 Curtis 等人在 [13] 中给出的构造一样, 见 3.4.5。

回忆 2.1.22 中的  $\Gamma_s$  ( $s \in S$ ) 为一个左胞腔, 故  $\Gamma_s^{-1} = \{w^{-1} \mid w \in \Gamma_s\}$  是一个右胞腔。记  $\mathcal{J}_{\Gamma_s^{-1}}^{\mathcal{C}}$  为  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}_1}^{\mathcal{C}}$  中由  $\{J_w \mid w \in \Gamma_s^{-1}\}$  张成的子空间。

**引理 3.4.1**  $\mathcal{J}_{\Gamma_s^{-1}}^{\mathbb{C}}$  是  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}_1}^{\mathbb{C}}$  的右理想，从而是它的  $\mathbb{C}[W]$  右子模。作为  $\mathbb{C}[W]$  右模， $\mathcal{J}_{\Gamma_s^{-1}}^{\mathbb{C}}$  由  $J_s$  一个元素生成。

**证明：** 基环中的乘法为  $J_x J_y = \sum_{z \in \mathcal{C}} \gamma_{x,y,z^{-1}} J_z$ ，而  $\gamma_{x,y,z^{-1}} \neq 0$  可推出  $z \underset{\mathbb{R}}{\sim} x$ ，见 2.3.3，因此  $\mathcal{J}_{\Gamma_s^{-1}}^{\mathbb{C}}$  是  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}_1}^{\mathbb{C}}$  的右理想。由 2.3.9 知  $\mathcal{J}_{\Gamma_s^{-1}}^{\mathbb{C}}$  是  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}_1}^{\mathbb{C}}$  的  $\mathbb{C}[W]$  右子模。

记  $M$  为  $J_s$  生成的  $\mathcal{J}_{\Gamma_s^{-1}}^{\mathbb{C}}$  的  $\mathbb{C}[W]$  右子模，要证明对任意  $w \in \Gamma_s^{-1}$ ， $J_w \in M$ 。对  $\ell(w)$  作归纳。当  $\ell(w) = 1$  时， $w = s$ ，无需说明。若  $\ell(w) > 1$ ，设  $w = yt$ ，其中  $t \in S$ ， $y \in \Gamma_s^{-1}$  且  $\ell(y) = \ell(w) - 1$ 。我们有

$$J_y \cdot t = J_y + J_w + \sum_{\substack{z \in \mathcal{C}_1 \\ z \underset{\mathbb{R}}{<} y, zt < z}} \mu(z, y) J_z.$$

等式右侧出现的  $z$  满足  $z \underset{\mathbb{R}}{\leq} y$ ，则  $z \in \Gamma_s^{-1}$ 。由归纳假设得到  $J_w \in M$ 。  $\square$

**推论 3.4.2** 设  $V$  为  $W$  的复表示，则  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}_1}^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}[W]} V = \bigoplus_{s \in S} (J_s \otimes_{\mathbb{C}[W]} V)$ 。

**证明：** 由 3.4.1， $\mathcal{J}_{\mathcal{C}_1}^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}[W]} V = \left( \bigoplus_{s \in S} \mathcal{J}_{\Gamma_s^{-1}}^{\mathbb{C}} \right) \otimes_{\mathbb{C}[W]} V = \bigoplus_{s \in S} (J_s \otimes_{\mathbb{C}[W]} V)$ 。  $\square$

回忆  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}_1}^q$  是一个自由  $\mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}]$  模，一组基为  $\{J_w \mid w \in \mathcal{C}_1\}$ 。由 2.2.1 和 2.2.2，它也是一个  $\mathcal{H}\text{-}\mathbb{C}[W]$  双模。记  $E_{\text{geom}} = \mathcal{J}_{\mathcal{C}_1}^q \otimes_{\mathbb{C}[W]} V_{\text{geom}}$ ，它是一个  $\mathcal{H}$  左模。

**引理 3.4.3** 作为  $\mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}]$  模， $E_{\text{geom}} = \bigoplus_{s \in S} \mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}] J_s \otimes \alpha_s$ 。

**证明：** 设  $v \in V_{\text{geom}}$ 。对任意的  $s \in S$ ，把  $v$  写成

$$v = B(v, \alpha_s) \alpha_s + (v - B(v, \alpha_s) \alpha_s).$$

记  $v_0 = v - B(v, \alpha_s) \alpha_s$ ，则  $B(v_0, \alpha_s) = 0$ ，于是  $(s+1) \cdot v_0 = 2v_0$ ，故

$$\begin{aligned} J_s \otimes v &= J_s \otimes (B(v, \alpha_s) \alpha_s + v_0) \\ &= B(v, \alpha_s) J_s \otimes \alpha_s + \frac{1}{2} J_s \cdot (s+1) \otimes v_0 \\ &= B(v, \alpha_s) J_s \otimes \alpha_s. \end{aligned}$$

结合 3.4.2， $E_{\text{geom}} = \bigoplus_{s \in S} \mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}] J_s \otimes_{\mathbb{C}[W]} V_{\text{geom}} = \bigoplus_{s \in S} \mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}] J_s \otimes \alpha_s$ 。  $\square$

**定理 3.4.4**  $E_{\text{geom}}$  是  $V_{\text{geom}}$  的  $q$ -形变，即  $E_{\text{geom}} \otimes_{\mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}]} \mathbb{C} \simeq V_{\text{geom}}$ ，且  $E_{\text{geom}}$  是自由的  $\mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}]$  模。

**证明：** 将  $E_{\text{geom}} \otimes_{\mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}]} \mathbb{C}$  简记为  $E_{\text{geom}}^{\mathbb{C}}$ 。下式定义了一个  $\mathbb{C}[W]$  模同态，

$$\begin{aligned} \phi : E_{\text{geom}}^{\mathbb{C}} &\rightarrow V_{\text{geom}}, \\ J_w \otimes v &\mapsto C_w \cdot v, \quad w \in \mathcal{C}_1, v \in V_{\text{geom}}. \end{aligned}$$

其中  $C_w$  通过 2.2.6 的方式作用在  $v$  上。由 3.3.2，对任意  $\alpha$ -函数大于等于 2 的  $w$ ， $C_w$  在  $V_{\text{geom}}$  上的作用总为零，容易验证  $\phi$  是一个良定义的模同态。注意到对任意  $s \in S$ ， $J_s \otimes \alpha_s \mapsto -2\alpha_s$ ，因此  $\phi$  是满射。

从 3.4.3 可知， $E_{\text{geom}}^{\mathbb{C}}$  由  $\{J_s \otimes \alpha_s \mid s \in S\}$  张成， $E_{\text{geom}}^{\mathbb{C}}$  的维数等于  $|S|$ ，即  $V_{\text{geom}}$  的维数，因此  $\phi$  是个同构。  $\square$

**3.4.5** 已经知道,  $E_{\text{geom}}$  是一个自由  $\mathbb{C}[q^{\pm\frac{1}{2}}]$  模, 以  $\{J_s \otimes \alpha_s \mid s \in S\}$  为一组基,  $E_{\text{geom}} \simeq V_{\text{geom}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[q^{\pm\frac{1}{2}}]$ .  $\mathcal{H}$  在  $E_{\text{geom}}$  上的作用也是容易写出的。设  $s, t \in S$ ,  $s \neq t$ , 则有

$$\begin{aligned}
 T_s \cdot (J_s \otimes \alpha_s) &= -J_s \otimes \alpha_s, \\
 T_s \cdot (J_t \otimes \alpha_t) &= \left( qJ_t + q^{\frac{1}{2}}J_{st} \right) \otimes \alpha_t \\
 &= qJ_t \otimes \alpha_t + q^{\frac{1}{2}}J_s \cdot (t-1) \otimes \alpha_t \\
 &= qJ_t \otimes \alpha_t + q^{\frac{1}{2}}J_s \otimes (-2\alpha_t) \\
 &= qJ_t \otimes \alpha_t - 2q^{\frac{1}{2}}J_s \otimes (v_0 + B(\alpha_t, \alpha_s)\alpha_s) \\
 &\quad (\text{其中 } v_0 = \alpha_t - B(\alpha_t, \alpha_s)\alpha_s) \\
 &= qJ_t \otimes \alpha_t - q^{\frac{1}{2}}J_s \otimes (s+1) \cdot v_0 - 2q^{\frac{1}{2}}J_s \otimes B(\alpha_t, \alpha_s)\alpha_s \\
 &= qJ_t \otimes \alpha_t - q^{\frac{1}{2}}J_s \cdot (s+1) \otimes v_0 + 2q^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\pi}{m_{st}} J_s \otimes \alpha_s \\
 &= qJ_t \otimes \alpha_t + 2q^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\pi}{m_{st}} J_s \otimes \alpha_s.
 \end{aligned}$$

当  $q$  取 1 时, 上式便成为  $W$  在几何表示上的作用。

在 [13, §9] 中, Curtis 等人构造了非等参数的 Hecke 代数  $\mathcal{H}$  的一个模, 作为其 Coxeter 群的几何表示的一个 (非等参数的) 形变。这里介绍它在等参数设定下的一个特殊形式, 我们可以看到它与 Lusztig 构造的  $q$ -形变是一致的。在  $V_{\text{geom}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[q^{\pm\frac{1}{2}}]$  上存在一个取值于  $\mathbb{C}[q^{\pm\frac{1}{2}}]$  的对称的  $\mathbb{C}[q^{\pm\frac{1}{2}}]$ -双线性型  $B$ , 在相差一个  $\mathbb{C}[q^{\pm\frac{1}{2}}]$  数乘的意义下唯一, 满足

$$-2q^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\pi}{m_{st}} = \frac{(q+1)B(\alpha_s, \alpha_t)}{B(\alpha_s, \alpha_s)}, \quad s, t \in S, s \neq t.$$

比如, 取  $B(\alpha_s, \alpha_s) = \frac{q+1}{2}$ ,  $B(\alpha_s, \alpha_t) = -q^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\pi}{m_{st}}$ ,  $s \neq t$ . 定义  $\mathcal{H}$  在  $V_{\text{geom}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[q^{\pm\frac{1}{2}}]$  上的作用为

$$T_s \cdot v := qv - (q+1) \frac{B(\alpha_s, v)}{B(\alpha_s, \alpha_s)} \alpha_s, \quad s \in S, v \in V_{\text{geom}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[q^{\pm\frac{1}{2}}].$$

则  $V_{\text{geom}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[q^{\pm\frac{1}{2}}]$  成为  $\mathcal{H}$  的一个模, 即  $E_{\text{geom}}$ .

**注 3.4.6** 如果  $V_{\text{geom}}$  是个可约的表示, 由 [8, Ch. V §4 no. 7], 记

$$V_0 := \{v \in V_{\text{geom}} \mid B(v, u) = 0, \forall u \in V_{\text{geom}}\}.$$

则  $V_0$  为  $V_{\text{geom}}$  的子表示, 且  $V_{\text{geom}}/V_0$  为  $W$  的不可约表示。我们有如下短正合序列,

$$0 \rightarrow V_0 \rightarrow V_{\text{geom}} \rightarrow V_{\text{geom}}/V_0 \rightarrow 0.$$

由张量函子右正合, 得到正合序列

$$\mathcal{J}_{\mathcal{C}_1}^q \otimes_{\mathbb{C}[W]} V_0 \rightarrow \mathcal{J}_{\mathcal{C}_1}^q \otimes_{\mathbb{C}[W]} V_{\text{geom}} \rightarrow \mathcal{J}_{\mathcal{C}_1}^q \otimes_{\mathbb{C}[W]} (V_{\text{geom}}/V_0) \rightarrow 0.$$

注意  $W$  在  $V_0$  上的作用是平凡的, 从 3.4.3 的证明中可知,  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}_1}^q \otimes_{\mathbb{C}[W]} V_0 = 0$ , 因此  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}_1}^q \otimes_{\mathbb{C}[W]} V_{\text{geom}} \simeq \mathcal{J}_{\mathcal{C}_1}^q \otimes_{\mathbb{C}[W]} (V_{\text{geom}}/V_0)$ 。而我们已经知道  $E_{\text{geom}} = \mathcal{J}_{\mathcal{C}_1}^q \otimes_{\mathbb{C}[W]} V_{\text{geom}}$  是一个秩为  $|S|$  的自由  $\mathbb{C}[q^{\pm\frac{1}{2}}]$  模, 因此  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}_1}^q \otimes_{\mathbb{C}[W]} (V_{\text{geom}}/V_0)$  不可能是  $W$  单模  $V_{\text{geom}}/V_0$  的  $q$ -形变。

因此, 对一般的  $W$  的不可约表示, 我们不能指望总是可以用 Lusztig 的方法构造出  $q$ -形变。是否总存在  $q$ -形变也是一个有趣的问题。

上面构造的  $E_{\text{geom}}$  “满足” 命题 2.4.5。

**命题 3.4.7** 在  $\mathcal{H}$  模  $E_{\text{geom}}$  上,  $\mathbf{v}(\text{tr}(T_w)) \geq \ell(w) - 1$ ,  $\forall w \in W$ 。存在  $w$  使得等号成立。

证明: 当  $w = e$  时,  $\text{tr}(T_e) = |S|$ ,  $\mathbf{v}(\text{tr}(T_e)) = 0$ 。

为记号简洁, 给  $S$  中的元素标序号, 记为  $\{s_1, s_2, \dots\}$ , 简记  $m_{s_i s_j}$  为  $m_{ij}$ , 将乘积  $s_{i_1} \cdots s_{i_r}$  记为  $\underline{i_1 \cdots i_r}$ , 类似地, 将  $T_{s_{i_1} \cdots s_{i_r}}$  记为  $T_{\underline{i_1 \cdots i_r}}$ 。设  $w = \underline{i_1 \cdots i_r}$  为一个既约表达, 设  $T_w$  在基  $\{J_{s_i} \otimes \alpha_{s_i} \mid 1 \leq i \leq |S|\}$  下的表示矩阵为  $(a_{i,j})$ ,  $a_{i,j} \in \mathbb{C}[q^{\pm\frac{1}{2}}]$ 。下面对  $r$  作归纳, 证明, 对任意的  $i$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(a_{i,j}) &\geq r, \quad \text{若 } j \neq i_r, \\ \mathbf{v}(a_{i,i_r}) &\geq r - 1. \end{aligned} \quad \dots (3.4)$$

当  $r = 1$  时, 以  $T_{\underline{1}}$  为例, 由 3.4.5 其表示矩阵形如

$$\begin{pmatrix} -1 & q_{12} & q_{13} & \cdots \\ 0 & q & 0 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & q \end{pmatrix}$$

其中  $q_{ij} = 2q^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\pi}{m_{ij}}$ 。该矩阵满足性质 (3.4)。注意由定义有  $\mathbf{v}(0) = +\infty$ , 见 2.1.18。特别地,  $\text{tr}(T_{\underline{1}}) = -1 + (|S| - 1)q$ ,  $\mathbf{v}(\text{tr}(T_{\underline{1}})) = 0$ , 命题中不等式的等号成立。

设  $r \geq 2$ , 则  $T_w = T_{\underline{i_1 \cdots i_{r-1}}} T_{\underline{i_r}}$ , 设  $T_{\underline{i_1 \cdots i_{r-1}}}$  和  $T_{\underline{i_r}}$  的表示矩阵分别为  $(b_{i,j})$  和  $(c_{i,j})$ , 则  $a_{i,j} = \sum_k b_{i,k} c_{k,j}$ , 由 2.1.18, 有

$$\mathbf{v}(a_{i,j}) \geq \min_k \{\mathbf{v}(b_{i,k}) + \mathbf{v}(c_{k,j})\}.$$

(1) 当  $j \neq i_r$  时,

i) 由归纳假设, 对那些不等于  $i_{r-1}$  的  $k$ ,  $\mathbf{v}(b_{i,k}) \geq r - 1$ , 而由于  $j \neq i_r$ , 有  $\mathbf{v}(c_{k,j}) \geq 1$ 。

ii) 对  $k = i_{r-1}$ , 由归纳假设,  $\mathbf{v}(b_{i,i_{r-1}}) \geq r - 2$ , 而由于  $i_{r-1} \neq i_r$ , 有  $c_{i_{r-1},j} = 0$  或  $q$ , 即  $\mathbf{v}(c_{i_{r-1},j}) \geq 2$ 。

于是得到  $\mathbf{v}(a_{i,j}) \geq r$ ,  $\forall j \neq i_r$ ,  $\forall i$ 。

(2) 当  $j = i_r$  时,

i) 由归纳假设, 对那些不等于  $i_{r-1}$  的  $k$ ,  $\mathbf{v}(b_{i,k}) \geq r-1$ , 而  $c_{k,i_r} = -1$  或 0, 即  $\mathbf{v}(c_{k,i_r}) \geq 0$ .

ii) 对  $k = i_{r-1}$ , 由归纳假设,  $\mathbf{v}(b_{i,i_{r-1}}) \geq r-2$ , 而由于  $i_{r-1} \neq i_r$ , 有  $c_{i_{r-1},i_r} = 0$ , 即  $\mathbf{v}(c_{i_{r-1},i_r}) = +\infty$ .

于是得到  $\mathbf{v}(a_{i,i_r}) \geq r-1, \forall i$ .

因此 (3.4) 对任意的  $w$  成立。

最后,

$$\mathbf{v}(\mathrm{tr}(T_w)) = \mathbf{v}\left(\sum_i a_{i,i}\right) \geq \min_i \mathbf{v}(a_{i,i}) \geq r-1.$$

这就是要证的结论。  $\square$

### 3.5 其他 $A_1$ -表示的 $q$ -形变

在这一节中我们对对应于  $\mathcal{C}_1$  的不可约表示做进一步的探讨。

设  $V$  是  $W$  的有限维不可约复表示, 对应于双边胞腔  $\mathcal{C}$ , 即  $V$  为  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}^{\mathbb{C}}$  的商。视  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}^{\mathbb{C}}$  为  $\mathbb{C}[W]$  双模, 作张量积  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}[W]} V$ 。有  $\mathbb{C}[W]$  模同态  $\phi: \mathcal{J}_{\mathcal{C}}^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}[W]} V \rightarrow V$ , 定义为  $J_x \otimes v \mapsto C_x \cdot v$ 。该同态非零, 因此是满射。Lusztig 在 [32] 中证明了  $\mathrm{Ker} \phi$  的合成因子对应的  $\mathbf{a}$ -函数值严格小于  $\mathbf{a}(\mathcal{C})$ , 即:

**引理 3.5.1** 设定如上。若  $C_x \cdot \mathrm{Ker} \phi \neq 0$ , 则  $\mathcal{C} \underset{\mathrm{LR}}{\leq} x$  且  $x \notin \mathcal{C}$ 。

**证明:** 由 2.3.9,  $C_x$  通过  $\varphi_{\mathcal{C}}^{\mathbb{C}}$  作用在  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}^{\mathbb{C}}$  上, 而如果  $x$  不满足  $\mathcal{C} \underset{\mathrm{LR}}{\leq} x$ , 则  $\varphi_{\mathcal{C}}^{\mathbb{C}}(C_x)$  为零。因此  $\mathcal{C} \underset{\mathrm{LR}}{\leq} x$ 。若  $x \in \mathcal{C}$ , 设  $\sum_i J_{y_i} \otimes v_i \in \mathrm{Ker} \phi$ , 则

$$C_x \cdot \sum_i J_{y_i} \otimes v_i = \sum_i J_x \cdot C_{y_i} \otimes v_i = J_x \otimes \sum_i C_{y_i} \cdot v_i = 0. \quad \square$$

**注 3.5.2** 记  $E := \mathcal{J}_{\mathcal{C}}^q \otimes_{\mathbb{C}[W]} V = \mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{J}_{\mathcal{C}}^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}[W]} V$ , 则  $E$  为  $\mathcal{H}$  模, 且为自由  $\mathbb{C}[q^{\pm \frac{1}{2}}]$  模。仔细检查 2.4.5 的证明, 可知 2.4.5 此时也成立:

$$\mathrm{tr}(\tilde{T}_x, E) = (-1)^{\mathbf{a}(\mathcal{C})} \mathrm{tr}(J_x, \mathcal{J}_{\mathcal{C}}^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}[W]} V) q^{-\frac{\mathbf{a}(\mathcal{C})}{2}} + q^{\frac{1}{2}} \text{的更高次项},$$

$$\mathrm{tr}(C_x, E) = (-1)^{\mathbf{a}(\mathcal{C})} \mathrm{tr}(J_x, \mathcal{J}_{\mathcal{C}}^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}[W]} V) q^{-\frac{\mathbf{a}(\mathcal{C})}{2}} + q^{\frac{1}{2}} \text{的更高次项}.$$

且存在  $x \in W$ , 使得  $\mathrm{tr}(J_x, \mathcal{J}_{\mathcal{C}}^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}[W]} V) \neq 0$ 。

**3.5.3** 如果  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$ , 即  $V$  对应于双边胞腔  $\mathcal{C}_1$ , 那么对任意  $s \in S$ ,  $C_s = \tilde{T}_s - q^{\frac{1}{2}}$  在  $\mathrm{Ker} \phi$  上的作用都为零, 即  $\mathrm{Ker} \phi$  为零或一些平凡表示的直和。由 3.4.2 知道,  $v \in \mathrm{Ker} \phi$  可写成  $v = \sum_{s \in S} J_s \otimes v_s$  的形式, 其中  $v_s \in V$ 。注意到  $s^2 = e$ ,  $s$  (或者说  $\tilde{T}_s$ ) 在  $V$  上的作用是半单的, 特征值为 1 和  $-1$ 。从 3.4.3 的证明中可以知道, 若  $v_s$  为  $s$  的特征值为 1 的特征向量, 则  $J_s \otimes v_s = 0$ , 因此我们可以选取  $v_s$  属于  $s$  的特征值为  $-1$  的特征子空间。对任意的  $t \in S$ ,

$$v = \tilde{T}_t \cdot v = -J_t \otimes v_t + \sum_{s \in S, s \neq t} (J_{ts} + J_s) \otimes v_s$$

$$\begin{aligned}
 &= -J_t \otimes v_t + \sum_{s \in S, s \neq t} (J_t \otimes C_s \cdot v_s + J_s \otimes v_s) \\
 &= J_t \otimes (-v_t - \sum_{s \in S, s \neq t} 2v_s) + \sum_{s \in S, s \neq t} J_s \otimes v_s
 \end{aligned}$$

于是我们得到

$$J_t \otimes (2v_t + \sum_{s \in S, s \neq t} 2v_s) = 0, \quad \forall t \in S,$$

即

$$J_t \otimes \sum_{s \in S} v_s = 0, \quad \forall t \in S.$$

用  $\phi$  作用得到

$$(\tilde{T}_t - q^{\frac{1}{2}}) \cdot \sum_{s \in S} v_s = 0, \quad \forall t \in S.$$

所以，向量  $\sum_{s \in S} v_s$  若非零，对任意的  $t \in S$ ，它都是  $t$  的特征值为 1 的特征向量。但这是不可能的，因为  $V$  是对应到  $\mathcal{C}_1$  的不可约表示。因此  $\sum_{s \in S} v_s = 0$ 。

反之，如果对每个  $s \in S$ ，在  $V$  中存在  $s$  的特征值为  $-1$  的特征向量  $v_s$ ，使得  $\{v_s\}$  不全为零，且  $\sum_{s \in S} v_s = 0$ ，由上面的计算可知  $v = \sum_{s \in S} J_s \otimes v_s$  属于  $\text{Ker } \phi$ 。若  $v = 0$ ，由 3.4.2 知，这意味着对每个  $s \in S$ ， $J_s \otimes v_s = 0$ 。与上一段一样，用  $\phi$  作用得到  $v_s$  是  $s$  的特征值为 1 的特征向量，矛盾。综上，我们证明了下面的命题。

**定理 3.5.4** 设  $V$  为  $W$  的有限维不可约复表示，对应于双边胞腔  $\mathcal{C}_1$ ，则满同态

$$\phi : \mathcal{J}_{\mathcal{C}_1}^{\mathcal{C}} \otimes_{\mathbb{C}[W]} V \rightarrow V, \quad J_x \otimes v \mapsto C_x \cdot v$$

是一个同构当且仅当不存在  $V$  中不全为零的向量组  $\{v_s\}_{s \in S}$ ，使得对每个  $s$ ， $s \cdot v_s = -v_s$ ，且  $\sum_{s \in S} v_s = 0$ 。若  $\phi$  不是同构，则  $W$  在  $\text{Ker } \phi$  上的作用是平凡的，且  $\text{Ker } \phi$  中的向量都可写成  $\sum_{s \in S} J_s \otimes v_s$  的形式，其中  $\{v_s\}_s$  如上。

**注 3.5.5** 从证明中知道对于  $v \in V$ ， $J_s \otimes v = 0$  当且仅当  $s \cdot v = v$ 。因此

$$\mathcal{J}_{\mathcal{C}_1}^{\mathcal{C}} \otimes_{\mathbb{C}[W]} V = \bigoplus_{s \in S} J_s \otimes_{\mathbb{C}[W]} V = \bigoplus_{s \in S} J_s \otimes_{\mathbb{C}[W]} V_s,$$

其中  $V_s$  为  $s$  的  $-1$ -特征子空间，且  $\dim J_s \otimes_{\mathbb{C}[W]} V_s = \dim V_s$ ，因此

$$\dim \text{Ker } \phi = \sum_{s \in S} \dim V_s - \dim V.$$

这是  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}_1}^{\mathcal{C}} \otimes_{\mathbb{C}[W]} V$  中平凡表示的重数。所以定理中的等价条件也可表述为

$$\sum_{s \in S} \dim V_s = \dim V.$$

**注 3.5.6** 若  $V_{\text{geom}}$  不可约，在 3.5.4 中取  $V = V_{\text{geom}}$ ，则定理中的条件  $s \cdot v_s = -v_s$  意味着  $v_s$  是  $\alpha_s$  的某个数乘。但  $\{\alpha_s \mid s \in S\}$  是线性无关的，因此得到各  $v_s$  为零。在这种情况下，3.4.4 可以视为 3.5.4 的特例。

若  $V_{\text{geom}}$  可约, 由 3.1.2 (5), 任取  $V_0$  中的非零向量  $v = \sum_{s \in S} v_s$ , 其中  $v_s$  为  $\alpha_s$  的某个数乘, 那么在单模  $V_{\text{geom}}/V_0$  中  $v = 0$  而  $v_s$  不全为零。应用 3.5.4 便得到 3.4.6 中  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}_1}^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}[W]} (V_{\text{geom}}/V_0) \not\cong (V_{\text{geom}}/V_0)$  的结论。

**例 3.5.7** 无穷二面体群  $D_\infty = \langle r, t \mid r^2 = t^2 = e \rangle$  只有两个双边胞腔,  $\{e\}$  和  $\mathcal{C}_1$ , 特别地,  $D_\infty$  的  $\mathbf{a}$ -函数有界。除了平凡表示外, 其他不可约表示都对应于  $\mathcal{C}_1$ 。

$D_\infty$  有四个一维表示, 分别为  $\mathbb{1}, \varepsilon, \varepsilon_r, \varepsilon_t$ , 见 3.2.5。套用 3.5.4 可知, 对  $\rho = \varepsilon_r$  或  $\varepsilon_t$ , 有  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}_1}^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}[W]} \rho \simeq \rho$ 。而  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}_1}^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}[W]} \varepsilon$  维数为 2, 有两个合成因子, 其中的子模同构于平凡表示, 由  $J_r \otimes \varepsilon - J_t \otimes \varepsilon$  张成, 商模同构于  $\varepsilon$ 。容易验证这个合成列不分裂。从 3.4.6 的讨论中知道,  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}_1}^q \otimes_{\mathbb{C}[W]} \varepsilon$  是几何表示的  $q$ -形变。

对于二维不可约表示  $\varrho_z (z \in \mathbb{C}^\times \setminus \{4\})$ , 见 3.2.5), 在相差一个数乘的意义下,  $r$  的  $-1$ -特征向量只有  $(1, 0)$ ,  $t$  的  $-1$ -特征向量只有  $(0, -1)$ 。套用 3.5.4 知,  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}_1}^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}[W]} \varrho_z \simeq \varrho_z$ 。

## 第 4 章 从图中构造表示

在上一章中，3.3.2 确定了 Coxeter 群  $(W, S)$  的不可约表示对应于双边胞腔  $\mathcal{C}_1$  或  $\{e\}$  的充要条件 (A1)。这一章考察某一类满足 (A1) 条件的表示，文中称为 IR-表示，这类表示可以视为几何表示的推广， $S$  中的元素以“反射”的方式作用在表示空间上。借助一些图的拓扑我们可以得到这类表示的完整分类。基本的想法是考虑由任意两个单反射  $s, t \in S$  生成的二面体子群，将表示限制在  $W$  的这些二面体子群上。而二面体群的表示论是清楚的，我们通过考察这些二面体群的表示互相之间如何“粘”成整个表示，便可以确定整个表示的结构。在这个过程中，一些和 Coxeter 图类似的图会出现，和这个表示相关的信息将会记录在这些图的同调群的特征标里。这样的考察不仅能得到表示的分类，还可以反映出表示的其他一些性质，比如，在几何表示上有一个群作用不变的双线性型，而 IR-表示上这样的双线性型的存在性与上述的图同调群的特征标的取值有关。

受此启发，我们可以借助 Coxeter 图的覆盖或基本群来构造一些 Coxeter 群的无穷维不可约表示。想法是类似的，取各二面体子群的无数个不可约表示通过某种方式“粘”在一起。当 Coxeter 图中存在回路时，它的万有覆盖是一个无穷的图，可用来“指导”上述二面体子群的表示的粘合方式，从而得到一个无穷维的表示。在 Coxeter 图中若还存在一条标记不是 3 的边，可以构造这个表示使得它有一个不可约商。而如果没有边上标记的限制，而是假设 Coxeter 图中存在不止一个回路，那么该图的基本群是一个非交换的自由群，它有无穷维不可约表示，这个表示也可用来“指导”二面体子群表示的粘合方式，以得到无穷维的不可约商。

### 4.1 图的基本概念

**4.1.1** 由定义，一个无向图  $G = (S, E)$  包含一个顶点集  $S$  和一个边集  $E$ ，边集  $E$  中的每个元素都是  $S$  的一个二元子集  $\{s, t\}$ ，称为边 (edge)， $S$  中的元素称为顶点 (vertex)。在本文中，我们只考虑不含圈状边 (loop) 且边不带重数的图，即：

- (1) 若  $\{s, t\} \subseteq S$  是一条边，则  $s \neq t$ 。
- (2) 任意一对  $\{s, t\} \subseteq S$  在  $E$  中最多只出现一次。

(在 Coxeter 图中  $m_{st}$  视为边  $\{s, t\}$  的标记 (label)，而非重数。) 称一个图为有限图，如果  $S$  是一个有限集 (从而  $E$  也是有限集)。

若  $s_1, \dots, s_n \in S$ ，且对所有的  $i$ ， $\{s_i, s_{i+1}\} \in E$ ，则称序列  $(s_1, \dots, s_n)$  为  $G$  中的一条路径 (path)。若该路径还满足  $s_1 = s_n$ ，则称这样的路径为闭路径 (closed path)。把  $(s_1, \dots, s_{n-1}, s_1)$  和  $(s_2, \dots, s_{n-1}, s_1, s_2)$  视为相同的闭路径。更进一步，如果该闭路径中  $s_1, \dots, s_{n-1}$  互异，则称该闭路径为回路 (circuit)。



如果图中每两个顶点都可用一条路径连接, 则称该图连通。若连通图中不存在回路, 则称该图为一个树 (tree)。一般地, 无回路的图称为森林 (forest), 它是若干个树的并。

设  $G = (S, E)$  是一个连通有限图, 若  $T = (S, E_0)$  为  $G$  的具有相同顶点集的连通子图,  $E_0 \subseteq E$ , 且  $T$  是一个树, 则称  $T$  是  $G$  的一个极大树 (maximal tree)。该定义等价于  $T$  连通且  $|E_0| = |S| - 1$ 。对一般的有限图  $G$ , 对每一连通分支选取一个极大树, 它们的并称为  $G$  的极大森林。任意有限图总存在极大森林, 但不唯一。

**4.1.2 图的同调** 设  $G = (S, E)$  为有限图, 它可以自然地视为有限单纯复形 (simplicial complex): 顶点为零维单形, 边为一维单形。有链复形

$$0 \rightarrow C_1(G) \xrightarrow{\partial} C_0(G) \rightarrow 0.$$

这里我们取系数为  $\mathbb{Z}$ 。零维同调群  $H_0(G)$  是一个自由 Abel 群, 秩等于  $G$  的连通分支个数。一维同调群  $H_1(G) = \text{Ker } \partial$  作为  $C_1(G)$  的子群, 也是有限生成的自由 Abel 群。

选取一个极大森林  $G_0 = (S, E_0)$ , 对任意的边  $e \in E \setminus E_0$ , 取定  $e$  的定向, 在图  $(S, E_0 \cup \{e\})$  中存在唯一的回路, 记为  $c_e$ , 使得该回路的方向与  $e$  的定向相容。 $c_e$  是  $H_1(G)$  中的一个元素。容易验证下面的群同态

$$\begin{aligned} H_1(G) &\rightarrow \bigoplus_{e \in E \setminus E_0} \mathbb{Z}e \quad (\text{由 } E \setminus E_0 \text{ 中的元素生成的自由 Abel 群}) \\ \sum_{e \in E} a_e \cdot e &\mapsto \sum_{e \in E \setminus E_0} a_e \cdot e \quad (a_e \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

是一个同构, 因此我们得到

$$H_1(G) = \bigoplus_{e \in E \setminus E_0} \mathbb{Z}c_e.$$

特别地,  $H_1(G)$  的秩为  $|E| - |E_0| = |E| - |S| + c$ , 其中  $c$  为  $G$  的连通分支个数。

对 Coxeter 图  $G$ , 忽视各边上的标记  $m_{st}$ , 它的整系数一维同调群也记为  $H_1(G)$ 。

**4.1.3 图的覆盖** 设  $G = (S, E)$ ,  $G' = (S', E')$  是两个图。设  $p: S' \rightarrow S$  是集合间的映射, 若对任意  $G'$  中的边  $\{s, t\}$ ,  $p(s) \neq p(t)$ , 且  $p(\{s, t\})$  也是  $G$  中的边, 则称  $p$  为图之间的态射, 记为  $p: G' \rightarrow G$ 。

$\forall s \in S$ , 记  $E_s := \{t \in S \mid \{s, t\} \in E\}$  为图  $G$  上与  $s$  相邻的顶点集合。设  $G$  为连通有限图,  $p: G' \rightarrow G$  为图的态射, 若进一步地,  $p(S') = S$ , 且  $\forall s \in S'$ ,  $p$  限制在  $E'_s$  上为双射  $E'_s \xrightarrow{\sim} E_{p(s)}$ , 则称  $p$  为图的覆盖 (covering)。特别地,  $G'$  是局部有限的图, 可视为局部有限的单纯复形, 从而覆盖  $p: G' \rightarrow G$  也是拓扑空间的覆盖。

反之, 视有限图  $G$  为拓扑空间, 设  $p: X \rightarrow G$  为拓扑空间的覆盖映射, 可以证明覆盖空间  $X$  有一个自然的图的结构, 以  $p^{-1}(S)$  为顶点集, 以  $X \setminus p^{-1}(S)$

的道路连通分支为边，见 [35, Theorem 83.4]。若取  $p$  为万有覆盖，则  $X$  单连通，作为图的结构是一个树。因此任给连通图  $G$ ，总存在一个单连通的图  $G'$  以及图的覆盖  $p: G' \rightarrow G$ 。

设  $G$  是连通的有限图但不是树，则它的基本群不平凡。设  $p: G' \rightarrow G$  是一个万有覆盖，从覆盖空间的理论知道， $G'$  是一个无限图。不仅如此， $G$  中的边在  $p$  下的原像也是  $G'$  中的无穷条边。

## 4.2 Coxeter 图和 IR-表示分类

为简单起见，本节至 4.4 节假设 Coxeter 系统  $(W, S)$  满足如下条件：

$$m_{rt} < \infty, \quad \forall r, t \in S.$$

记它的 Coxeter 图为  $G$ 。在这一节中，我们考虑  $W$  的满足如下条件的表示  $V$ ：

(IR)  $V$  有一组基  $\{\alpha_s \mid s \in S\}$ ，且对任意的  $s \in S$  存在余维数为 1 的子空间  $H_s$  使得  $s|_{H_s} = \text{Id}_{H_s}$ ，并且  $s \cdot \alpha_s = -\alpha_s$ 。

“IR”两个字母意为“independent reflection”（线性无关的反射）。为说话方便，将满足该条件的表示称为 IR-表示。显然 IR-表示满足 3.3.2 中的条件 (A1)。特别地，几何表示满足条件 (IR)。

下面设  $V$  为一个 IR-表示。采用 3.2.1 中的记号。

**引理 4.2.1** 设  $r, t \in S$ ,  $r \neq t$ 。

- (1)  $\alpha_r, \alpha_t$  在  $V$  中张成二面体子群  $\langle r, t \rangle$  的子表示。
- (2)  $H_r \neq H_t$  且  $V = (H_r \cap H_t) \oplus \mathbb{C}\alpha_r \oplus \mathbb{C}\alpha_t$ 。
- (3) 作为  $\langle r, t \rangle$  的表示， $\mathbb{C}\alpha_r \oplus \mathbb{C}\alpha_t$  同构于  $\rho_{k_{rt}}$ ，其中  $1 \leq k_{rt} \leq m_{rt}/2$  为某一整数， $\rho_{k_{rt}}$  为 3.2.1 中定义的表示。

**证明：** 对任意的  $s \in S$ ,  $V = H_s \oplus \mathbb{C}\alpha_s$ 。任取  $v \in V$ ，写为  $v = v_s + a\alpha_s$ ，其中  $v_s \in H_s$ ,  $a \in \mathbb{C}$ ，则  $s \cdot v = v - 2a\alpha_s$ 。因此  $\langle r, t \rangle$  的作用保持子空间  $\mathbb{C}\alpha_r \oplus \mathbb{C}\alpha_t$ 。

设  $0 \neq v \in H_r \cap H_t \cap (\mathbb{C}\alpha_r \oplus \mathbb{C}\alpha_t)$ ，那么  $v = x_r\alpha_r + x_t\alpha_t$ ，其中  $x_r, x_t \in \mathbb{C}^\times$ 。直接计算得知对任意  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(rt)^n \cdot (x_r\alpha_r) = x_r\alpha_r + 2nv$ ，这与假设  $m_{rt} < \infty$  矛盾。

由 (2)，在子表示  $\mathbb{C}\alpha_r \oplus \mathbb{C}\alpha_t$  中没有  $\langle r, t \rangle$  的平凡表示  $\mathbf{1}$ 。根据假设 (IR)，符号表示  $\varepsilon$  也不会出现。另外，该表示也不是  $2\varepsilon_r$  或  $2\varepsilon_t$ ，因此， $\mathbb{C}\alpha_r \oplus \mathbb{C}\alpha_t$  只能同构于某个  $\rho_{k_{rt}}$ 。□

**4.2.2** 从 4.2.1 (3) 中知道，存在  $a_r^t, a_t^r \in \mathbb{C}^\times$  (但不唯一) 使得从  $\rho_{k_{rt}}$  到  $\mathbb{C}\alpha_r \oplus \mathbb{C}\alpha_t$  的同构把  $\beta_r$  映为  $a_r^t\alpha_r$ ，把  $\beta_t$  映为  $a_t^r\alpha_t$  ( $\beta_r, \beta_t$  是 3.2.1 中选定的  $\rho_{k_{rt}}$  的一组基)，也就是说，

$$r \cdot \alpha_t = \alpha_t + 2 \frac{a_r^t}{a_t^r} \cos \frac{k_{rt}\pi}{m_{rt}} \alpha_r, \quad t \cdot \alpha_r = \alpha_r + 2 \frac{a_t^r}{a_r^t} \cos \frac{k_{rt}\pi}{m_{rt}} \alpha_t. \quad \dots (4.1)$$

因此，鉴于  $r, t$  是任取的一对单反射， $W$  在  $V$  上的作用由资料  $(k_{rt}, a_r^t)_{r, t \in S, r \neq t}$  唯一确定。

反之, 任给并固定如下资料,

$$(k_{rt}, a_r^t)_{r,t \in S, r \neq t}, \quad \text{其中 } k_{rt} \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq k_{rt} = k_{tr} \leq \frac{m_{rt}}{2}, \quad a_r^t \in \mathbb{C}^\times,$$

对任意的  $r \in S$  由下式定义  $r$  在  $V := \bigoplus_{s \in S} \mathbb{C}\alpha_s$  上的线性作用,

$$r \cdot \alpha_r = -\alpha_r, \quad r \cdot \alpha_t = \alpha_t + 2 \frac{a_r^t}{a_t^r} \cos \frac{k_{rt}\pi}{m_{rt}} \alpha_r, \quad \forall t \neq r. \quad \dots (4.2)$$

我们断言在该作用下,  $V$  成为  $W$  的  $\mathbb{R}$ -表示。

断言的证明: 首先, 容易知道  $r^2$  的作用为恒等映射。考虑  $(rt)^{m_{rt}}$ , 在  $\mathbb{C}\alpha_r \oplus \mathbb{C}\alpha_t$  上,  $(rt)^{m_{rt}}$  作用为恒等映射因为这个二维子空间构成  $\langle r, t \rangle$  的表示  $\rho_{k_{rt}}$ 。对于  $s \neq r, t$  (如果存在的话), 记  $V_1$  为由  $\alpha_r, \alpha_t, \alpha_s$  张成的三维子空间。根据构造, 存在向量  $v_1 \in \mathbb{C}\alpha_r \oplus \mathbb{C}\alpha_s$  和  $v_2 \in \mathbb{C}\alpha_r \oplus \mathbb{C}\alpha_t$ , 使得在基  $\{\alpha_r, \alpha_t, \alpha_s\}$  下,  $v_1$  的  $\alpha_s$ -系数非零,  $v_2$  的  $\alpha_t$ -系数非零, 并且  $r \cdot v_1 = v_1$ ,  $r \cdot v_2 = v_2$ 。因此  $v_1$  和  $v_2$  张成了  $V_1$  的一个二维子空间,  $r$  在其上作用为恒等映射。同理, 存在  $v_3$  和  $v_4$  张成  $V_1$  的一个二维子空间并且逐点在  $t$  作用下保持不动。出于维数的原因, 在  $V_1$  中便存在非零向量  $v$  同时被  $r$  和  $t$  固定。

根据构造,  $\mathbb{C}\alpha_r \oplus \mathbb{C}\alpha_t$  构成  $\langle r, t \rangle$  的表示  $\rho_{k_{rt}}$ , 这里面不存在被  $r$  和  $t$  同时固定的非零向量, 因此  $v \notin \mathbb{C}\alpha_r \oplus \mathbb{C}\alpha_t$ 。由  $V_1$  的定义, 知  $\alpha_s = x_v v + x_r \alpha_r + x_t \alpha_t$ , 其中  $x_v, x_r, x_t \in \mathbb{C}$ 。至此可以看到  $(rt)^{m_{rt}} \cdot \alpha_s = \alpha_s$ 。由于  $s \neq r, t$  是任意的, 我们得到,  $V$  在上述定义的作用下成为  $W$  的一个表示。

从上述论证中也可以看出, 对每一个  $r \in S$ , 存在  $|S| - 1$  个线性无关的向量被  $r$  所固定, 因此表示  $V$  满足条件 (IR)。□

**4.2.3** 我们需要确定何时两组不同的资料  $(k_{rt}, a_r^t)_{r,t}$  和  $(l_{rt}, b_r^t)_{r,t}$  定义了同构的表示。记  $V_1 = \bigoplus_{s \in S} \mathbb{C}\alpha_s$ ,  $V_2 = \bigoplus_{s \in S} \mathbb{C}\alpha'_s$  分别为这两组资料所定义的  $\mathbb{R}$ -表示。假设它们是同构的,  $\varphi: V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$ , 根据 4.2.1 (3), 必然成立  $k_{rt} = l_{rt}$ ,  $\forall r, t \in S$ , 即

$$V_1 \simeq V_2 \implies k_{rt} = l_{rt}, \forall r, t \in S.$$

对任意一对互异的  $r, t \in S$ , 取  $d_{rt} = \text{g. c. d.}(m_{rt}, k_{rt})$ 。定义另一个 Coxeter 系统  $(\widetilde{W}, S)$  如下, 它有相同的生成元集  $S$ , 而  $rt$  的阶为  $\widetilde{m}_{rt} := m_{rt}/d_{rt}$ 。记  $\widetilde{G} = (S, E)$  为  $(\widetilde{W}, S)$  的 Coxeter 图。我们有一个自然的群同态  $W \rightarrow \widetilde{W}$ 。根据 3.2.4,  $W$  的表示  $V_1$  和  $V_2$  经由  $\widetilde{W}$  分解。作为  $\widetilde{W}$  的  $\mathbb{R}$ -表示,  $V_1$  由资料  $(\widetilde{k}_{rt}, a_r^t)_{r,t}$  所定义, 其中  $\widetilde{k}_{rt} := k_{rt}/d_{rt}$ 。  $V_2$  类似。

链群  $C_1(\widetilde{G})$  是一个由 (定向的) 边集  $\{(s, t)\}$  生成的自由 Abel 群。由下式, 资料  $(k_{rt}, a_r^t)_{r,t}$  定义了  $C_1(\widetilde{G})$  的一个一维表示,

$$(r, t) \mapsto \frac{a_t^r}{a_r^t}.$$

该表示限制到子群  $H_1(\widetilde{G})$  上, 记为  $\chi_1$ 。类似地,  $(r, t) \mapsto b_t^r/b_r^t$  定义了  $H_1(\widetilde{G})$  的另一个特征标, 记为  $\chi_2$ 。

**引理 4.2.4** 在  $\varphi: V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$  的假设下,  $\chi_1 = \chi_2$ 。

证明: 设  $(s_1, s_2, \dots, s_n, s_1)$  是  $\tilde{G}$  中的一条回路, 为简便, 记  $\alpha_i := \alpha_{s_i}$ ,  $a_i^j := a_{s_i}^{s_j}$ ,  $m_{ij}, \tilde{m}_{ij}, k_{ij}, \alpha'_i, b_i^j$  等类似。据假设,  $\varphi(\alpha_1)$  是  $\alpha'_1$  的某个常数倍, 设  $\varphi(\alpha_1) = x\alpha'_1$ ,  $x \in \mathbb{C}^\times$ 。既然  $s_1, s_2$  是  $\tilde{G}$  的一条边, 有  $k_{12} \neq m_{12}/2$ , 因此  $\mathbb{C}\alpha_1 \oplus \mathbb{C}\alpha_2$  和  $\mathbb{C}\alpha'_1 \oplus \mathbb{C}\alpha'_2$  构成子群  $\langle s_1, s_2 \rangle$  的同构的不可约表示  $\rho_{k_{12}}$ 。由  $V_1, V_2$  的构造和 Schur 引理, 我们得到  $\varphi(\alpha_2) = x(a_1^2 b_2^1 / a_2^1 b_1^2) \alpha'_2$ 。沿着所选取的回路做同样的分析, 最终我们得到

$$\varphi(\alpha_1) = x \frac{a_1^2 a_2^3 \cdots a_{n-1}^n a_n^1 b_2^1 b_3^2 \cdots b_{n-1}^{n-1} b_1^n}{a_2^1 a_3^2 \cdots a_{n-1}^n a_n^1 b_1^2 b_2^3 \cdots b_{n-1}^n b_n^1} \alpha'_1,$$

与  $\varphi(\alpha_1) = x\alpha'_1$  作比较, 下式成立,

$$\frac{a_2^1 a_3^2 \cdots a_{n-1}^n a_n^1}{a_1^2 a_2^3 \cdots a_{n-1}^n a_n^1} = \frac{b_2^1 b_3^2 \cdots b_{n-1}^{n-1} b_1^n}{b_1^2 b_2^3 \cdots b_{n-1}^n b_n^1}.$$

等号两边分别为所选取的回路在  $\chi_1$  和  $\chi_2$  下的值。  $\square$

由 4.2.4, 给一组资料  $(k_{rt}, a_r^t)_{r,t}$ , 4.2.3 中定义的  $H_1(\tilde{G})$  的一维表示只依赖于该资料所定义的  $\mathbb{R}$ -表示的同构类。

**推论 4.2.5** 取定正整数集  $(k_{rt})_{r,t}$ , 4.2.3 中给出的映射

$$\begin{aligned} \Theta = \Theta((k_{rt})_{r,t}) : \{ & \text{由 } (k_{rt}, a_r^t)_{r,t} \text{ 定义的 } \mathbb{R}\text{-表示 } | a_r^t \in \mathbb{C}^\times, \forall r, t \in S\} / \simeq \\ & \rightarrow \{H_1(\tilde{G}) \text{ 的特征标}\} \end{aligned}$$

是良定义的。

**引理 4.2.6** 取定  $(k_{rt})_{r,t}$  如上,  $\Theta$  是满射。

证明: 选取并固定  $\tilde{G} = (S, E)$  的一个极大森林  $\tilde{G}_0 = (S, E_0)$ , 记  $c_\epsilon$  ( $\epsilon \in E \setminus E_0$ ) 为 4.1.2 中定义回路, 那么

$$H_1(\tilde{G}) = \bigoplus_{\epsilon \in E \setminus E_0} \mathbb{Z}c_\epsilon,$$

给出  $H_1(\tilde{G})$  的一个特征标  $\chi$  等价于给出一组数  $\{x_\epsilon \in \mathbb{C}^\times \mid \epsilon \in E \setminus E_0\}$ , 并指定  $\chi(c_\epsilon) = x_\epsilon$ 。对任意一对互异的  $r, t \in S$ , 取

$$a_r^t = \begin{cases} x_{\{t,r\}}, & \text{若 } \{t,r\} \in E \setminus E_0 \text{ 且定向为 } (t,r), \\ 1, & \text{其它情况。} \end{cases}$$

容易验证, 在映射  $\Theta$  下, 资料  $(k_{rt}, a_r^t)_{r,t}$  给出了上面给定的特征标  $\chi$ 。  $\square$

**引理 4.2.7** 取定  $(k_{rt})_{r,t}$  如上,  $\Theta$  是单射。

证明: 假设  $\Theta(V_1) = \Theta(V_2)$ , 其中  $V_1 = \bigoplus_{s \in S} \mathbb{C}\alpha_s$ ,  $V_2 = \bigoplus_{s \in S} \mathbb{C}\alpha'_s$  分别为两组资料  $(k_{rt}, a_r^t)_{r,t}$  和  $(k_{rt}, b_r^t)_{r,t}$  定义的  $\mathbb{R}$ -表示。在  $\tilde{G}$  的任意一个连通分支中取定一

个顶点  $s_1$ ，对同一连通分支中的任一顶点  $s$ ，选择一条路径  $(s_1, s_2, \dots, s_n = s)$ 。使用 4.2.4 证明中的记号  $\alpha_i, a_i^j$  等等。由下式定义一个线性映射  $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ ，

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\mapsto \alpha'_1, \\ \alpha_n &\mapsto \frac{a_1^2 a_2^3 \cdots a_{n-1}^n b_2^1 b_3^2 \cdots b_n^{n-1}}{a_2^1 a_3^2 \cdots a_n^{n-1} b_1^2 b_2^3 \cdots b_{n-1}^n} \alpha'_n. \end{aligned}$$

我们需要验证  $\varphi(\alpha_n)$  不依赖于上述路径的选取 (但注意  $\varphi$  依赖于每一连通分支中的顶点  $s_1$  的选取)。设另有一条路径连接  $s_1$  和  $s_n = s$ ，记为

$$(s_1, s_p, s_{p-1}, \dots, s_{n+1}, s_n),$$

它和原来的路径首尾相连构成一条闭路径

$$(s_1, \dots, s_n, s_{n+1}, \dots, s_p, s_1).$$

由于  $\Theta(V_1) = \Theta(V_2)$ ，我们有

$$\frac{a_2^1 \cdots a_n^{n-1} a_{n+1}^n \cdots a_p^{p-1} a_1^p}{a_1^2 \cdots a_{n-1}^n a_n^{n+1} \cdots a_p^p a_1^1} = \frac{b_2^1 \cdots b_n^{n-1} b_{n+1}^n \cdots b_p^{p-1} b_1^p}{b_1^2 \cdots b_{n-1}^n b_n^{n+1} \cdots b_{p-1}^p b_1^1}.$$

将该等式整理为

$$\frac{a_1^2 a_2^3 \cdots a_{n-1}^n b_2^1 b_3^2 \cdots b_n^{n-1}}{a_2^1 a_3^2 \cdots a_n^{n-1} b_1^2 b_2^3 \cdots b_{n-1}^n} = \frac{a_1^p a_p^{p-1} \cdots a_{n+1}^n b_p^1 b_{p-1}^p \cdots b_n^{n+1}}{a_p^1 a_{p-1}^p \cdots a_n^{n+1} b_1^p b_p^{p-1} \cdots b_{n+1}^n}.$$

这便意味着  $\varphi(\alpha_n)$  不依赖于路径的选取。

由定义， $\varphi$  是一个线性空间的同构。下面验证  $\varphi$  是  $W$  的表示的同态。为此只需验证  $\varphi(s \cdot \alpha_t) = s \cdot \varphi(\alpha_t)$ ， $\forall s, t \in S$ 。若  $s = t$ ，这是显然的。若  $s \neq t$  且在  $\tilde{G}$  中不相邻 (即  $\{s, t\}$  不是一条边， $\tilde{m}_{st} = 2$ )，那么  $s \cdot \alpha_t = \alpha_t$ ， $s \cdot \alpha'_t = \alpha'_t$ ，上述等式依然成立。现在假设  $\tilde{m}_{st} > 2$ ，则  $s$  和  $t$  落在  $\tilde{G}$  的同一个连通分支中。设  $\varphi(\alpha_s) = x \alpha'_s$ ， $x \in \mathbb{C}^\times$ ，根据上一段所证明的良定义性，有

$$\varphi(\alpha_t) = x \frac{a_s^t b_t^s}{a_t^s b_s^t} \alpha'_t.$$

直接计算得

$$\begin{aligned} \varphi(s \cdot \alpha_t) &= \varphi\left(\alpha_t + 2 \frac{a_s^t}{a_t^s} \cos \frac{k_{st}}{m_{st}} \alpha_s\right) \\ &= x \frac{a_s^t b_t^s}{a_t^s b_s^t} \alpha'_t + 2x \frac{a_s^t}{a_t^s} \cos \frac{k_{st}}{m_{st}} \alpha'_s, \\ s \cdot \varphi(\alpha_t) &= x \frac{a_s^t b_t^s}{a_t^s b_s^t} (s \cdot \alpha'_t) \\ &= x \frac{a_s^t b_t^s}{a_t^s b_s^t} \left(\alpha'_t + 2 \frac{b_s^t}{b_t^s} \cos \frac{k_{st}}{m_{st}} \alpha'_s\right). \end{aligned}$$

因此  $\varphi(s \cdot \alpha_t) = s \cdot \varphi(\alpha_t)$ 。 □

将这一节的所有讨论结合起来，我们便证明了：

**定理 4.2.8**  $(W, S)$  的 IR-表示的同构类一一对应于如下的资料

$$\left\{ ((k_{rt})_{r \neq t \in S}, \chi) \mid 1 \leq k_{rt} = k_{tr} \leq \frac{m_{rt}}{2}, \forall r, t, \chi \text{ 是 } H_1(\tilde{G}) \text{ 的特征标} \right\}.$$

这个双射的构造见 4.2.3 和 4.2.6 的证明过程。

**注 4.2.9** (1) 取所有的  $k_{rt} = 1$ , 以及  $\chi$  为平凡表示, 所得到的 IR-表示就是几何表示  $V_{\text{geom}}$ 。

(2) 上述定理得到的表示分类在基域为  $\mathbb{R}$  时也适用。

(3) 记  $(W, S)$  的 Coxeter 图为  $G$ , 忽略 Coxeter 图上的标记,  $\tilde{G}$  是  $G$  的子图, 二者具有相同的顶点集。  $G$  中的边  $\{r, t\}$  不出现在  $\tilde{G}$  中当且仅当  $m_{rt}$  为偶数, 并且  $k_{rt}$  选取为  $m_{rt}/2$ 。有可能出现  $G$  连通但  $\tilde{G}$  不连通的情况。

从 4.2.7 的证明中可以得到如下推论, 而 3.1.2 (6) 是该推论的特例。

**推论 4.2.10**  $V, \tilde{G}$  如上, 记  $g$  为  $\tilde{G}$  的连通分支的数目, 那么  $\text{End}_W(V) \simeq \mathbb{C}^{\oplus g}$ 。特别地, 若  $g = 1$ ,  $V$  的自同态只能为数乘。

### 4.3 可约性和 R-表示

当  $(W, S)$  可约时, 几何表示自然地分解为各分支的几何表示的直和。当  $(W, S)$  不可约时, 3.1.2 (4)(5) 告诉我们如何判断几何表示是否可约, 并刻画了它的子表示。在这一节中, 我们会看到对一般的 IR-表示也有类似的命题。作为应用, 我们对更大的一类表示也有清晰的刻画。

**4.3.1 IR-表示的可约性** 设  $V$  为  $(W, S)$  的一个 IR-表示, 由资料  $(k_{rt}, a_r^t)_{r,t}$  所定义。设  $\tilde{G}$  的连通分支分解  $S = \sqcup_i S_i$ , 记  $W_i$  和  $\tilde{W}_i$  分别为  $S_i$  在  $W$  和  $\tilde{W}$  中生成的子群, 则  $\tilde{W} = \prod_i \tilde{W}_i$ , 且  $V = \bigoplus_i V_i$  其中  $V_i = \bigoplus_{s \in S_i} \mathbb{C}\alpha_s$  是  $W$  在  $V$  中的子表示。每一个  $V_i$  都是 Coxeter 系统  $(W_i, S_i)$  的一个 IR-表示, 由资料  $(k_{rt}, a_r^t)_{r,t \in S_i, r \neq t}$  定义, 并经由  $\tilde{W}_i$  分解。对  $j \neq i$ ,  $W_j$  在  $V_i$  上的作用是平凡的。我们可以将目光集中在各分量上。

现在假设  $\tilde{G}$  是连通的。设  $V_0$  是  $V$  的子表示,  $v \in V_0$ 。若对某一  $s \in S$ ,  $s \cdot v \neq v$ , 那么根据定义  $v - s \cdot v \in \mathbb{C}\alpha_s$ , 从而  $\alpha_s \in V_0$ 。若  $r \in S$  是  $\tilde{G}$  中和  $s$  相邻的一个顶点, 由于  $\mathbb{C}\alpha_s \oplus \mathbb{C}\alpha_r$  构成  $\langle s, r \rangle$  的一个不可约子表示, 必有  $\alpha_r \in V_0$ 。注意到  $\tilde{G}$  连通, 归纳地, 得到  $V = V_0$ 。所以, 如果  $V$  可约, 那么  $V$  有一个极大的真子表示,  $W$  平凡地作用在这个子表示上。并且, 商表示是不可约的。

给  $S$  中的元素编号,  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ , 并使用记号  $\alpha_i, k_{ij}, a_i^j$  等等。设  $v = \sum_j x_j \alpha_j$ , 其中  $x_j \in \mathbb{C}$  不全为零, 则

$$\begin{aligned} s_i \cdot v &= -x_i \alpha_i + \sum_{j \neq i} x_j \left( \alpha_j + 2 \frac{a_i^j}{a_j^i} \cos \frac{k_{ij} \pi}{m_{ij}} \alpha_i \right) \\ &= \left( -x_i + \sum_{j \neq i} 2x_j \frac{a_i^j}{a_j^i} \cos \frac{k_{ij} \pi}{m_{ij}} \right) \alpha_i + \sum_{j \neq i} x_j \alpha_j. \end{aligned}$$

若  $v$  被所有的  $s_i$  所固定, 那么

$$x_i - \sum_{j \neq i} x_j \frac{a_i^j}{a_j^i} \cos \frac{k_{ij}\pi}{m_{ij}} = 0, \quad \forall i. \quad \dots (4.3)$$

这样的非零向量  $v$  存在, 即方程组 (4.3) 关于不定元  $\{x_i\}_i$  有非零解, 当且仅当  $n \times n$  的系数矩阵  $A$  是奇异的,

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_1^2}{a_2^1} \cos \frac{k_{12}\pi}{m_{12}} & \dots \\ -\frac{a_2^1}{a_1^2} \cos \frac{k_{12}\pi}{m_{12}} & 1 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \quad \dots (4.4)$$

(对角线上元素为 1, 而对  $i \neq j$ ,  $(i, j)$  位置的元素为  $-\frac{a_i^j}{a_j^i} \cos \frac{k_{ij}\pi}{m_{ij}}$ . 注意  $A$  一般不是对称矩阵。)  $A$  的余秩等于解空间的维数, 即  $V$  的极大子表示的维数。将上述讨论总结为下面的命题:

**命题 4.3.2** 设  $V$  为  $W$  的  $\mathbf{IR}$ -表示, 由资料  $(k_{rt}, a_r^t)_{r,t}$  所定义。

- (1) 设  $\tilde{G}$  连通,  $V$  不可约当且仅当 (4.4) 中的矩阵  $A$  可逆。
- (2) 设  $\tilde{G}$  连通, 若  $V$  可约, 则  $V$  有一个极大真子表示  $V_0$ ,  $W$  平凡地作用在  $V_0$  上。任何  $V_0$  外的向量生成整个表示  $V$ , 因此  $V$  不是半单的, 而且商  $V/V_0$  是维数为  $\text{rank}(A)$  的不可约表示。
- (3) 若  $\tilde{G}$  不连通,  $S = \sqcup_i S_i$  为其连通分支分解, 那么  $V = \bigoplus_i V_i$  其中  $V_i = \bigoplus_{s \in S_i} \mathbb{C}\alpha_s$  是不可分解的子表示。(1) 和 (2) 中的结果可应用在各  $V_i$  上。特别地,  $V$  半单当且仅当矩阵  $A$  可逆。

**注 4.3.3** 从 4.2.8 中知道, 若取定  $(k_{rt})_{r,t}$  使得  $\tilde{G}$  连通, 相应的  $\mathbf{IR}$ -表示由环面  $(\mathbb{C})^N$  参数化, 其中  $N$  是  $H_1(\tilde{G})$  的秩。对  $H_1(\tilde{G})$  的任一特征标, 采用 4.2.6 的方法选取数集  $(a_r^t)_{r,t}$ , 由上面的命题可知, 这些  $\mathbf{IR}$ -表示中的可约表示全体构成了  $(\mathbb{C})^N$  的一个子簇。

**4.3.4 R-表示** 在条件 (IR) 中, 我们要求向量组  $\{\alpha_s\}_s$  是线性无关的。现在我们去掉这个假设, 但仍保留 3.3.2 中的条件 (A1)。因此, 称  $W$  的表示  $V$  为  $\mathbf{R}$ -表示, 如果  $V$  满足下面的条件:

- (R)  $V$  由非零向量  $\{\alpha_s | s \in S\}$  张成。对任意的  $s \in S$ , 存在余维数为 1 的子空间  $H_s$  使得  $s|_{H_s} = \text{Id}_{H_s}$ , 并且  $s \cdot \alpha_s = -\alpha_s$ 。而且, 对任意一对  $r \neq t \in S$ , 若  $m_{rt} < \infty$ , 则  $\alpha_r$  和  $\alpha_t$  是线性无关的。

显然  $\mathbf{R}$ -表示也满足条件 (A1)。注意在本节中我们仍假设所有的  $m_{rt} < \infty$  (见 4.2 节开头), 故任意一对  $\alpha_r, \alpha_t$  都不在同一条 (复) 直线上。

**定理 4.3.5** 设  $V$  是一个  $\mathbf{R}$ -表示。

- (1) 在同构的意义下, 存在唯一的  $\mathbf{IR}$ -表示  $V'$  使得  $V$  是  $V'$  的商, 记为  $\pi: V' \twoheadrightarrow V$ , 且  $\text{Ker } \pi$  作为子表示, 其上的  $W$  作用是平凡的。

(2) 所有半单  $\mathbf{R}$ -表示的同构类一一对应于所有  $\mathbf{IR}$ -表示的同构类，亦对应于 4.2.8 中的资料集  $\{((k_{rt})_{r,t}, \chi)\}$ 。特别地，不可约  $\mathbf{R}$ -表示对应于其中  $\tilde{G}$  连通的那些资料。

证明：  $V = \sum_{s \in S} \mathbb{C}\alpha_s$ ，且对任意的  $s \in S$ ，  $V = H_s \oplus \mathbb{C}\alpha_s$ 。根据假设，对任意的  $r \neq t \in S$ ，  $\mathbb{C}\alpha_r + \mathbb{C}\alpha_t = \mathbb{C}\alpha_r \oplus \mathbb{C}\alpha_t$  是二维子空间。与 4.2.1 同理，  $\mathbb{C}\alpha_r \oplus \mathbb{C}\alpha_t$  是二面体群  $\langle r, t \rangle$  在  $V$  中的子表示。因此，如同 4.2.2，  $V$  给出了一组资料  $(k_{rt}, a_r^t)_{r,t}$ 。记  $V' = \bigoplus_{s \in S} \mathbb{C}\alpha'_s$  为这组资料所定义的  $\mathbf{IR}$ -表示，以及  $\pi : V' \rightarrow V$  为线性满射  $\alpha'_s \mapsto \alpha_s$ 。容易验证，  $\pi$  是表示的同态，因此  $V$  是  $V'$  的商。这证明了 (1) 中的存在性断言。

假设  $V'' = \bigoplus_{s \in S} \mathbb{C}\alpha''_s$  是另一个  $\mathbf{IR}$ -表示，由资料  $(l_{rt}, b_r^t)_{r,t}$  定义，且  $\pi'' : V'' \rightarrow V$  为满同态。把基向量调整为某个常数倍后，可假设  $\pi''(\alpha''_s) = \alpha_s$ ，  $\forall s$ 。限制到二面体子群  $\langle r, t \rangle$  上，由于  $\mathbb{C}\alpha''_r \oplus \mathbb{C}\alpha''_t$  和  $\mathbb{C}\alpha_r \oplus \mathbb{C}\alpha_t$  作为  $\langle r, t \rangle$  的表示是同构的，必成立  $k_{rt} = l_{rt}$ 。然后，考虑  $r \cdot \alpha''_t$  和  $r \cdot \alpha_t$ ，若  $k_{rt} \neq m_{rt}/2$ ，根据 (4.1) 式知  $a_r^t/a_t^r = b_r^t/b_t^r$ 。因此，资料  $(k_{rt}, a_r^t)_{r,t}$  和  $(k_{rt}, b_r^t)_{r,t}$  给出了  $H_1(\tilde{G})$  的相同的特征标。由 4.2.8，有表示同构  $V' \simeq V''$ 。这证明了 (1) 中的唯一性断言。

设  $S = \sqcup_i S_i$  为  $\tilde{G}$  的连通分支分解，则  $V' = \bigoplus_i V'_i$ ，其中  $V'_i = \bigoplus_{s \in S_i} \mathbb{C}\alpha'_s$  为  $V'$  的子表示。记  $V'_{i,0}$  为  $V'_i$  的极大子表示 (可能为零)。若  $0 \neq v \in \text{Ker } \pi$ ，写为  $v = \bigoplus_i v_i$ ，其中各  $v_i \in V'_i$ 。取  $s \in S_j$ ，对任意的  $i \neq j$ ，有  $s \cdot v_i = v_i$ 。若  $s \cdot v_j \neq v_j$ ，则 4.3.1 中的论证表明  $V'_j \subseteq \text{Ker } \pi$ ，这与  $\pi(\alpha'_s) = \alpha_s$  矛盾。因此对每一个  $i$ ，有  $v_i \in V'_{i,0}$ ， $W$  在  $\text{Ker } \pi$  上的作用平凡。(1) 得证。

我们已得到  $\text{Ker } \pi \subseteq V'_0 := \bigoplus_i V'_{i,0}$ 。一方面，根据 4.3.2，  $V'/V'_0$  是半单的  $\mathbf{R}$ -表示。另一方面，若  $\text{Ker } \pi \subsetneq V'_0$ ，比如  $V'_{j,0} \not\subseteq \text{Ker } \pi$ ，那么  $\pi(V'_j)$  是  $V$  的不可分解但可约的子表示，从而  $V$  不是半单的。(2) 得证。  $\square$

**注 4.3.6** (1) 取证明中的  $v = \bigoplus_i v_i \in \text{Ker } \pi$ ，分量  $v_i$  有可能不属于  $\text{Ker } \pi$ 。事实上，取  $\bigoplus_i V'_{i,0}$  的任意子空间，商  $V'/K$  皆为  $W$  的  $\mathbf{R}$ -表示。4.3.7 便是这样的具体例子。

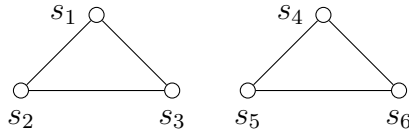
(2) 设  $V'$  是一个  $\mathbf{IR}$ -表示，  $V_1, V_2$  为  $\mathbf{R}$ -表示且为  $V'$  的商，  $\pi_1 : V' \twoheadrightarrow V_1$ ，  $\pi_2 : V' \twoheadrightarrow V_2$ 。假设  $\tilde{G}$  连通，与 4.2.10 相同的论证表明  $\text{End}_W(V_i) = \mathbb{C}$  且  $\text{Hom}_W(V', V_i) \simeq \mathbb{C}$ ，  $\forall i = 1, 2$ 。此时若有同构  $\phi : V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$ ，则复合映射  $\phi \circ \pi_1 : V' \twoheadrightarrow V_2$  是  $\pi_2$  的非零常数倍。因此  $\text{Ker } \pi_1 \subseteq \text{Ker } \pi_2$ 。同理得到反方向的包含，从而  $\text{Ker } \pi_1 = \text{Ker } \pi_2$ 。也就是说，在  $\tilde{G}$  连通时，  $\mathbf{IR}$ -表示  $V'$  的商表示的同构类由  $V'$  的极大子表示  $V'_0$  的子空间全体所参数化，即  $V'_0$  中所有 Grassmann 流形的并。

但是，当  $\tilde{G}$  不连通时，由于  $\mathbf{IR}$ -表示的自同态在不同的  $\tilde{G}$  的分支上可以是不同的数乘，上述的讨论失效，对不同的子空间作商可能得到同构的商表示。下面是一个简单的例子。

**例 4.3.7** 当  $\tilde{G}$  不连通时，  $\mathbf{IR}$ -表示关于两个不相同的子表示的商可能是同构的。



假设  $G = \tilde{G}$  为  $\tilde{A}_2 \times \tilde{A}_2$  型, 即



取  $V$  为相应的几何表示, 那么  $V$  同构于两个  $\tilde{A}_2$  的几何表示的直和。取  $v_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ ,  $v_2 = \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$ , 那么  $V_0 := \mathbb{C}v_1 \oplus \mathbb{C}v_2$  是  $V$  的极大子表示, 带有  $W$  的平凡作用。商  $V/\mathbb{C}v_1$  和  $V/\mathbb{C}v_2$  显然是不同构的。但是, 令  $V_1 = V/\mathbb{C}(v_1 + v_2)$ ,  $V_2 = V/\mathbb{C}(v_1 + 2v_2)$ , 则  $\alpha_i \mapsto \alpha_i, i = 1, 2, 3$ ,  $\alpha_j \mapsto 2\alpha_j, j = 4, 5, 6$  定义了一个从  $V_1$  到  $V_2$  的同构。

#### 4.4 其他性质: 双线性型, 对偶表示

在这一节中我们考察  $\mathbf{IR}$ -表示的其他性质。首先我们讨论  $\mathbf{IR}$ -表示何时拥有一个群作用不变的双线性型。然后我们考虑一个  $\mathbf{IR}$ -表示的对偶表示的结构, 发现大多数时候也是  $\mathbf{IR}$ -表示, 并且二者所对应的资料也有好的联系。这些讨论也可简单地过渡到  $\mathbf{R}$ -表示上。

如 4.3.1 开头所说, 一个  $\mathbf{IR}$ -表示  $V$  以  $\tilde{G}$  分解为连通分支之并的方式分解为子表示的直和, 并且每个子表示为相应的抛物子群的  $\mathbf{IR}$ -表示。我们可专注于这些直和分量, 假设  $\tilde{G}$  是连通的。

**命题 4.4.1** 设  $V$  是由资料  $(k_{rt}, a_r^t)_{r,t}$  定义的  $\mathbf{IR}$ -表示, 相应的  $H_1(\tilde{G})$  的特征标为  $\chi$ 。假设  $\tilde{G}$  连通。

- (1)  $V$  有一个非零的  $W$ -不变双线性型当且仅当  $\chi(H_1(\tilde{G})) \subseteq \{\pm 1\}$ 。
- (2)  $V$  有一个非零的  $W$ -不变半双线性型 (见 3.2.3) 当且仅当  $\chi(H_1(\tilde{G})) \subseteq S^1$ 。

证明: 设  $V$  上有  $W$ -不变的双线性型  $B$ 。任取  $\tilde{G}$  上的回路  $(s_1, s_2, \dots, s_n, s_1)$ , 假设  $B(\alpha_1, \alpha_1) = x$  (这里  $\alpha_1 = \alpha_{s_1}$ , 其他记号类似), 则根据 3.2.3 和  $V$  的构造 (4.2) 式, 有  $B(\alpha_2, \alpha_2) = x(a_1^2/a_2^1)^2$ 。沿着这条回路作类似的考虑, 最终我们得到

$$x = B(\alpha_1, \alpha_1) = x \left( \frac{a_1^2 a_2^3 \cdots a_{n-1}^n a_n^1}{a_2^1 a_3^2 \cdots a_n^{n-1} a_1^n} \right)^2. \quad \dots (4.5)$$

上面的讨论告诉我们  $x \neq 0$ , 否则由 3.2.3 知  $B = 0$ 。因此 (4.5) 式意味着这条回路在  $\chi$  下的像为  $\pm 1$ 。

反之, 假设  $\chi(H_1(\tilde{G})) \subseteq \{\pm 1\}$ 。取定  $\tilde{G}$  中的顶点  $s_1$ , 定义  $B(\alpha_1, \alpha_1) := 1$ 。对另一顶点, 选取一条路径  $(s_1, s_2, \dots, s_n = s)$ , 并根据 3.2.3, 定义

$$B(\alpha_s, \alpha_s) := \left( \frac{a_1^2 a_2^3 \cdots a_{n-1}^n}{a_2^1 a_3^2 \cdots a_n^{n-1}} \right)^2.$$

对  $t \neq s$ , 定义

$$B(\alpha_t, \alpha_s) = B(\alpha_s, \alpha_t) := -\frac{a_s^t}{a_t^s} \cos \frac{k_{st}\pi}{m_{st}} B(\alpha_s, \alpha_s).$$

$$\left(\text{也等于 } -\frac{a_t^s}{a_s^t} \cos \frac{k_{st}\pi}{m_{st}} B(\alpha_t, \alpha_t)\right)$$

需要验证  $B(\alpha_s, \alpha_s)$  的值不依赖于从  $s_1$  到  $s$  的路径的选取。假设有另一条路径  $(s_1, s_p, s_{p-1}, \dots, s_{n+1}, s_n = s)$ ，它与原先选取的路径首尾相连构成一条闭路径

$$(s_1, \dots, s_n, s_{n+1}, \dots, s_p, s_1).$$

假设的条件告诉我们，

$$\pm 1 = \frac{a_1^2 \cdots a_{n-1}^n a_n^{n+1} \cdots a_{p-1}^p a_p^1}{a_2^1 \cdots a_n^{n-1} a_{n+1}^n \cdots a_p^{p-1} a_1^p},$$

整理后即为我们所要验证的，

$$\left(\frac{a_1^2 a_2^3 \cdots a_{n-1}^n}{a_2^1 a_3^2 \cdots a_n^{n-1}}\right)^2 = \left(\frac{a_1^p a_p^{p-1} \cdots a_{n+1}^n}{a_p^1 a_{p-1}^p \cdots a_n^{n+1}}\right)^2.$$

我们还需要验证这样定义的  $B$  是  $W$ -不变的。只需要对  $s, r, t \in S$  检验  $B(s \cdot \alpha_r, s \cdot \alpha_t) = B(\alpha_r, \alpha_t)$ 。若  $s = r = t$ ，这是显然的。若  $s, r, t$  中有两者相等，那么所有事情都发生在二面体群的二维表示中，3.2.3 告诉我们所要验证的等式成立。若  $s, r, t$  互异，

$$\begin{aligned} B(s \cdot \alpha_r, s \cdot \alpha_t) &= B\left(\alpha_r + 2\frac{a_s^r}{a_r^s} \cos \frac{k_{sr}\pi}{m_{sr}} \alpha_s, \alpha_t + 2\frac{a_s^t}{a_t^s} \cos \frac{k_{st}\pi}{m_{st}} \alpha_s\right) \\ &= B(\alpha_r, \alpha_t) + 2\frac{a_s^t}{a_t^s} \cos \frac{k_{st}\pi}{m_{st}} B(\alpha_r, \alpha_s) \\ &\quad + 2\frac{a_s^r}{a_r^s} \cos \frac{k_{sr}\pi}{m_{sr}} B(\alpha_s, \alpha_t) + 4\frac{a_s^t a_s^r}{a_t^s a_r^s} \cos \frac{k_{st}\pi}{m_{st}} \cos \frac{k_{sr}\pi}{m_{sr}} B(\alpha_s, \alpha_s) \\ &= B(\alpha_r, \alpha_t). \end{aligned}$$

命题中 (2) 的证明与上述类似。  $\square$

**注 4.4.2** (1) 设定如 4.4.1，从命题的证明中可以看出， $W$ -不变的双线性型  $B$  是对称的 (若存在)，且在相差一个  $\mathbb{C}^\times$ -数乘的意义下唯一。若不要求  $\tilde{G}$  连通，如同 4.3.1 把  $V$  分解为  $V = \bigoplus_i V_i$ ，那么 4.4.1 可应用在各  $V_i$  上。

(2) 根据 4.4.1， $W$  只有有限多个  $\mathbf{IR}$ -表示拥有群作用不变的双线性型，几何表示是其中之一。

**4.4.3** 设  $V$  是一个  $\mathbf{IR}$ -表示，相应的  $\tilde{G}$  连通。假设  $V$  是可约的，记  $V_0$  为  $V$  的极大子表示， $W$  平凡作用于  $V_0$  上。假设  $V$  上有一个  $W$ -不变的双线性型  $B$ 。取  $v = \sum_s x_s \alpha_s \in V_0$ ，从 4.4.1 的证明过程中可以知道，

$$B(v, \alpha_r) = x_r B(\alpha_r, \alpha_r) - \sum_{s \neq r} x_s \frac{a_r^s}{a_s^r} \cos \frac{k_{sr}\pi}{m_{sr}} B(\alpha_r, \alpha_r) = 0, \quad \forall r \in S. \quad \dots (4.6)$$

这里第二个等号来自 (4.3) 式。设  $V_1$  是  $V$  的商， $V_1$  是  $\mathbf{R}$ -表示，有满射  $\pi: V \rightarrow V_1$ ，则  $\text{Ker } \pi \subseteq V_0$ 。(4.6) 式告诉我们  $V$  上的双线性型  $B$  可以下降到  $V_1$  上。

反之, 设  $V_1$  为一个  $\mathbf{R}$ -表示, 相应的  $\tilde{G}$  连通。假设  $V_1$  有一个  $W$ -不变的双线性型  $B$ , 与 4.4.1 相同的论证表明同样成立  $\chi(H_1(\tilde{G})) \subseteq \{\pm 1\}$ , 而且这样的双线性型在相差一个数乘的意义下唯一。另外,  $B$  可以提升到  $V$  上 ( $V$  是相应的  $\mathbf{IR}$ -表示)。

**4.4.4 对偶表示** 设  $V = \bigoplus_{s \in S} \mathbb{C}\alpha_s$  是一个  $\mathbf{IR}$ -表示, 由资料  $(k_{rt}, a_r^t)_{r,t}$  定义。记  $V^* := \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$  为对偶空间,  $\{\alpha_s^*\}_{s \in S}$  为  $\{\alpha_s\}_s$  的对偶基。通过定义作用  $(s \cdot \alpha_t^*)(-) = \alpha_t^*(s \cdot -)$ ,  $V^*$  成为  $W$  的表示。直接的计算表明

$$s \cdot \alpha_s^* = -\alpha_s^* + \sum_{t \neq s} 2 \frac{a_s^t}{a_t^s} \cos \frac{k_{st}\pi}{m_{st}} \alpha_t^*,$$

$$s \cdot \alpha_t^* = \alpha_t^*, \quad \forall t \neq s.$$

由此我们看到  $s$  在  $V^*$  中唯一的  $-1$ -特征向量为 (相差一个数乘的意义下)

$$\gamma_s := \alpha_s^* - \sum_{t \neq s} \frac{a_s^t}{a_t^s} \cos \frac{k_{st}\pi}{m_{st}} \alpha_t^*.$$

**命题 4.4.5** (1)  $\{\gamma_s\}_{s \in S}$  是线性无关的当且仅当 (4.4) 式中定义的矩阵  $A$  是可逆的, 当且仅当  $V$  是半单的。

- (2)  $V$  半单时,  $V^* = \bigoplus_s \mathbb{C}\gamma_s$  是  $W$  的  $\mathbf{IR}$ -表示。设  $((k_{rt})_{r,t}, \chi)$  是  $V$  对应的资料, 那么  $V^*$  对应于资料  $((k_{rt})_{r,t}, \chi^*)$ , 这里  $\chi^*(-) = \chi(-)^{-1}$ 。
- (3) 一般地,  $\{\gamma_s\}_{s \in S}$  张成  $V^*$  的一个子表示  $V_1 := \sum_{s \in S} \mathbb{C}\gamma_s$  of  $V^*$ 。  $V_1$  是一个  $\mathbf{R}$ -表示, 它是对应于资料  $(k_{rt})_{r,t}, \chi^*$  的  $\mathbf{IR}$ -表示的半单的商。  $W$  在商表示  $V^*/V_1$  上的作用是平凡的。

证明: (1) 是显然的; (2) 和 (3) 可从 4.2.3 和 4.3.5 的讨论, 以及如下的计算中得到,

$$s \cdot \gamma_t = \gamma_t + 2 \frac{a_t^s}{a_s^t} \cos \frac{k_{st}\pi}{m_{st}} \gamma_s,$$

并注意到  $V$  和  $V^*$  相应的矩阵  $A$  互为转置, 并且  $V_1$  的维数等于  $A$  的秩。  $\square$

## 4.5 一般情形: 允许 $m_{rt} = \infty$

**4.5.1** 现在我们去掉  $m_{rt} < \infty$  的假设, 考虑一般的 Coxeter 系统  $(W, S)$ , 记其 Coxeter 图为  $G$ 。对任意一对  $r \neq t \in S$ , 定义一个参数集 (记号如 3.2.1、3.2.5)

$$P_{rt} := P_{m_{rt}} = \begin{cases} \{\rho_k \mid k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq \frac{m_{rt}}{2}\}, & \text{若 } m_{rt} < \infty; \\ \{\varrho_r^t, \varrho_t^r\} \cup \{\varrho_z \mid z \in \mathbb{C}\}, & \text{若 } m_{rt} = \infty. \end{cases}$$

注意  $P_\infty$  囊括了  $D_\infty$  的所有  $\mathbf{IR}$ -表示。假设对任意一对  $r \neq t \in S$  给定  $\delta_{rt} \in P_{rt}$ , 使得  $\delta_{rt} = \delta_{tr}$  为二面体群  $\langle r, t \rangle$  的同一表示, 定义一个 Coxeter 系统  $(\tilde{W}, S)$  如下:

- (1) 若  $m_{rt} < \infty$ ,  $\delta_{rt} = \rho_k$ , 则令  $\tilde{m}_{rt} = m_{rt}/d$ , 其中  $d = \text{g. c. d.}(m_{rt}, k)$ ;

- (2) 若  $m_{rt} = \infty$ ,  $\delta_{rt} = \varrho_z$ ,  $z = 4 \cos^2 \frac{k\pi}{m}$ , 其中  $k, m \in \mathbb{N}$  互素,  $1 \leq k < m/2$ , 则令  $\tilde{m}_{rt} = m$  (此时  $m \geq 3$ );
- (3) 若  $m_{rt} = \infty$ ,  $\delta_{rt} = \varrho_0$ , 令  $\tilde{m}_{rt} = 2$ ;
- (4) 其余情况, 令  $\tilde{m}_{rt} = \infty$ .

记  $\tilde{G}$  为  $(\tilde{W}, S)$  的 Coxeter 图。  $\delta_{rt}$  的表示空间记为  $\mathbb{C}\beta_r \oplus \mathbb{C}\beta_t$ , 如 3.2.1、3.2.5。

**定理 4.5.2**  $(W, S)$  的 IR-表示的同构类与如下资料一一对应,

$$\left\{ \left( (\delta_{rt})_{r \neq t \in S}, \chi \right) \mid \delta_{rt} = \delta_{tr} \in P_{rt}, \forall r, t; \chi \text{ 为 } H_1(\tilde{G}) \text{ 的特征标} \right\}.$$

证明: 设  $V = \bigoplus_s \mathbb{C}\alpha_s$  为  $W$  的一个 IR-表示, 4.2.1 (1) 仍成立。对任意的  $r \neq t \in S$ , 存在  $\delta_{rt} \in P_{rt}$ , 使得  $\mathbb{C}\alpha_r \oplus \mathbb{C}\alpha_t$  构成  $\langle r, t \rangle$  的表示, 同构于  $\delta_{rt}$ 。存在  $a_r^t, a_t^r \in \mathbb{C}^\times$  使得该同构为  $a_r^t \alpha_r \mapsto \beta_r$ ,  $a_t^r \alpha_t \mapsto \beta_t$ 。此时对任意的  $r, t$ , 作用  $r \cdot \alpha_t$  是清楚的, 所以  $V$  作为  $W$  表示的结构由资料  $(\delta_{rt}, a_{r,t}^t)$  确定。

反之, 给定资料  $(\delta_{rt}, a_{r,t}^t)_{r,t}$  其中  $\delta_{rt} = \delta_{tr} \in P_{rt}$ ,  $a_r^t \in \mathbb{C}^\times$ , 通过线性同构  $a_r^t \alpha_r \mapsto \beta_r$ ,  $a_t^r \alpha_t \mapsto \beta_t$  将  $\mathbb{C}\alpha_r \oplus \mathbb{C}\alpha_t$  和  $\mathbb{C}\beta_r \oplus \mathbb{C}\beta_t$  等同起来, 则  $\langle r, t \rangle$  以  $\delta_{rt}$  的方式作用在  $\mathbb{C}\alpha_r \oplus \mathbb{C}\alpha_t$  上。需要说明这定义了  $W$  在  $V := \bigoplus_s \mathbb{C}\alpha_s$  上的 IR-表示结构。我们仅需验证当  $m_{rt} < \infty$  时成立  $(rt)^{m_{rt}} \cdot \alpha_s = \alpha_s$ 。此时 4.2.2 中的证明依旧有效。

对这样的资料  $(\delta_{rt}, a_{r,t}^t)_{r,t}$  及其相应的  $\tilde{G}$ , 和 4.2.3 一样定义  $H_1(\tilde{G})$  的特征标  $\chi$ , 这时 4.2.3, 4.2.4, 4.2.6, 4.2.7 中的论证都适用, 从而定理成立。  $\square$

**定理 4.5.3** 设  $V = \sum_s \mathbb{C}\alpha_s$  为  $W$  的 R-表示, 那么  $V$  是唯一一个 IR-表示  $V' = \bigoplus_s \mathbb{C}\alpha'_s$  的商。商映射记为  $\pi: V' \rightarrow V$ , 则  $\text{Ker } \pi$  上的  $W$ -作用是平凡的。

证明: 此时我们允许  $m_{rt}$  为  $\infty$ , 因此  $\alpha_r$  可能为  $\alpha_t$  的非零常数倍。若该情形发生, 则取  $\delta_{rt} = \varrho_4$ , 即几何表示, 并选取  $a_r^t, a_t^r \in \mathbb{C}^\times$  使得  $a_r^t \alpha_r = a_t^r \alpha_t$ 。除了这个特殊的情况外, 证明和 4.3.5 (1) 相同。  $\square$

**4.5.4 矩阵 A** 设  $V$  是一个 IR-表示。鉴于 4.5.3, 我们想在  $V$  中找到子表示使得  $W$  平凡地作用于其上。把  $S$  写为  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ , 按之前的习惯, 使用记号  $P_{ij}, \delta_{ij}, \varrho_i^j$  等。设  $v = \sum_j x_j \alpha_j \in V$ , 选定某  $s_i \in S$ , 那么

$$\begin{aligned} s_i \cdot v &= -x_i \alpha_i + \sum_{s_j \in S_1} x_j \left( \alpha_j + 2 \frac{a_i^j}{a_j^i} \cos \frac{k_{ij}\pi}{m_{ij}} \alpha_i \right) + \sum_{s_j \in S_2} x_j \alpha_j \\ &\quad + \sum_{s_j \in S_3} x_j \left( \alpha_j + \frac{a_i^j}{a_j^i} \alpha_i \right) + \sum_{s_j \in S_4} x_j \left( \alpha_j + u_{ij} \frac{a_i^j}{a_j^i} \alpha_i \right) \quad \dots (4.7) \\ &= \left( -x_i + \sum_{s_j \in S_1} 2x_j \frac{a_i^j}{a_j^i} \cos \frac{k_{ij}\pi}{m_{ij}} + \sum_{s_j \in S_3} x_j \frac{a_i^j}{a_j^i} + \sum_{s_j \in S_4} x_j u_{ij} \frac{a_i^j}{a_j^i} \right) \alpha_i + \sum_{j \neq i} x_j \alpha_j, \end{aligned}$$

其中 (我们有  $S = S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3 \sqcup S_4 \sqcup \{s_i\}$ )

$$S_1 = \{s_j \in S \mid m_{ij} < \infty\}, \quad 1 \leq k_{ij} \leq \frac{m_{ij}}{2} \text{ 使得 } \delta_{ij} = \rho_{k_{ij}},$$

$$S_2 = \{s_j \in S \mid m_{ij} = \infty, \delta_{ij} = \varrho_j^i\},$$

$$S_3 = \{s_j \in S \mid m_{ij} = \infty, \delta_{ij} = \varrho_i^j\},$$

$$S_4 = \{s_j \in S \mid m_{ij} = \infty, \delta_{ij} = \varrho_{z_{ij}}, z_{ij} \in \mathbb{C}\}, \quad u_{ij} = u(z_{ij}) \text{ 如 3.2.5 中所定义.}$$

如同 4.3.1, 定义一个  $n \times n$  的方阵  $A$ , 其  $(i, j)$ -位置的元素  $A_{ij}$  定义为 (这里  $S_1 = S_1(i), \dots$  是依赖于  $i$  的集合)

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若 } i = j, \\ -\frac{a_i^j}{a_j^i} \cos \frac{k_{ij}\pi}{m_{ij}}, & \text{若 } s_j \in S_1, \\ 0, & \text{若 } s_j \in S_2, \\ -\frac{a_i^j}{2a_j^i}, & \text{若 } s_j \in S_3, \\ -\frac{u_{ij}a_i^j}{2a_j^i}, & \text{若 } s_j \in S_4. \end{cases}$$

从 (4.7) 式知道, 以  $A$  为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间恰为  $V$  的具有平凡  $W$ -作用的子表示。

**4.5.5 其他的可约性** 与 4.3.2 相比, 在一般的设定下考虑  $\mathbf{IR}$ -表示的可约性时会有一些不同的现象出现。比如,  $D_\infty$  的表示  $\varrho_r^t$  就有非平凡  $W$ -作用的子表示。

给一  $\mathbf{IR}$ -表示  $V$ , 为说话方便, 我们先在图  $\tilde{G}$  上附加更多的一些信息。对任意一对  $r \neq t \in S$ , 若  $\delta_{rt} = \varrho_r^t$ , 则称  $t \rightarrow r$ 。对称地, 称  $r \rightarrow t$  若  $\delta_{rt} = \varrho_t^r$ 。对  $\tilde{G}$  中其他的边  $\{r, t\}$ , 称  $r \rightarrow t$  且  $t \rightarrow r$ 。这里定义的箭头含义为, 若  $r \rightarrow t$  则  $\alpha_t$  属于  $\alpha_r$  生成的子表示。

这些箭头生成了  $S$  上的一个预序: 称  $r \leq_d t$  如果存在  $S$  中的序列  $r = s_1, s_2, \dots, s_n = t$  使得对任意的  $i$  成立  $s_{i+1} \rightarrow s_i$ 。相应的等价关系记为  $\sim_d$ : 称  $r \sim_d t$  如果  $r \leq_d t$  且  $t \leq_d r$ 。不难得到如下的事实。

**推论 4.5.6** 设  $V$  为  $\mathbf{IR}$ -表示。

- (1) 若  $S$  中的所有元素在  $\sim_d$  关系下都是等价的, 那么  $W$  在  $V$  的任何一个真子表示上的作用都是平凡的。
- (2) 设  $I \subseteq S$  为  $\sim_d$  关系下的一个等价类, 那么  $\bigoplus_{s \in I} \mathbb{C}\alpha_s$  是  $V$  的子表示。

**4.5.7 双线性型** 和 4.4.1 不同的是, 在一般的情况下, 即使假设  $\chi(H_1(\tilde{G})) \subseteq \{\pm 1\}$ ,  $\mathbf{IR}$ -表示  $V$  上也有可能不存在非零的  $W$ -不变的双线性型。例如, 取  $S = \{s, t, r\}$ ,  $m_{st} = \infty$ ,  $m_{rt} = m_{sr} = 3$ , 以及  $\delta_{st} = \varrho_s^t$ 。假设  $B$  是  $V$  上的  $W$ -不变的双线性型, 根据 3.2.5 (4), 得  $B(\alpha_s, \alpha_s) = 0$ 。再由 3.2.3, 得到  $B(\alpha_r, \alpha_r) = 0$ , 从而也成立  $B(\alpha_t, \alpha_t) = 0$ , 因此  $B = 0$ 。

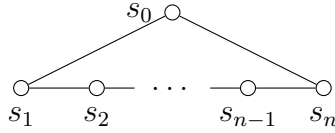
若对任意一对  $r \neq t \in S$ ,  $\delta_{rt} \neq \varrho_r^t$  或  $\varrho_t^r$ , 在这种情况下 4.4.1 依旧适用。

#### 4.6 从 $\tilde{A}_n$ 型到单连丝型

如果对任意的  $r, t \in S$ , 都有  $m_{rt} = 2$  或  $3$ , 则称 Coxeter 系统  $(W, S)$  为单连

丝型 (simply laced type)。在这一节中，我们将证明，如果单连丝型的 Coxeter 图中只有一个回路 (例如  $\tilde{A}_n$  型)，那么相应的 Coxeter 系统对应于双边胞腔  $\mathcal{C}_1$  的所有不可约表示都是 R-表示。

**4.6.1**  $\tilde{A}_n$  型 Coxeter 群的定义为  $W = \langle s_0, s_1, \dots, s_n \mid s_i^2 = (s_i s_{i+1})^3 = 1, \forall i \rangle$  (把  $n+1$  视为 0)。它的 Coxeter 图  $G$  形如



在定义 IR-表示的资料中，对任意的  $i \neq j$ ，条件  $1 \leq k_{ij} \leq m_{ij}/2$  迫使  $k_{ij} = 1$ ，因此  $\tilde{G} = G$ 。取  $G$  的极大树为  $G_0 = (S, E_0)$ ，其中  $E_0 = \{\{s_{i-1}, s_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$ 。同调群  $H_1(G)$  同构于  $\mathbb{Z}$ ，由回路  $c = (s_0, s_1, \dots, s_n, s_0)$  生成。给出  $H_1(G)$  的一个特征标等价于给出一个数  $x \in \mathbb{C}^\times$ ，作为该特征标在  $c$  上的取值。因此， $W$  的 IR-表示由  $\mathbb{C}^\times$  参数化。

给定上述的  $x$ ，采用 4.2.6 的证明中的构造，令  $a_0^n = x$ ， $a_n^0 = a_0^1 = a_1^0 = \dots = 1$ ，则 (4.4) 式中的方阵  $A$  (此时  $A$  为  $n+1$  阶矩阵) 为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & -\frac{x}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & & & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & & & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2x} & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

(除主对角线，两条次对角线，以及右上角和左下角两个元素外，其他位置均为 0。) 通过对  $n$  的归纳可计算得  $A$  的行列式，

$$\det A = \frac{2 - x - x^{-1}}{2^{n+1}}.$$

记该 IR-表示为  $V_x$ ，根据 4.3.2， $V_x$  不可约当且仅当  $x \neq 1$ 。当  $x = 1$  时， $V_x = V_{\text{geom}}$ 。

**命题 4.6.2** 记号如上。集合  $\{V_x \mid x \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}\}$ ，以及几何表示  $V_{\text{geom}}$  的不可约商，囊括了  $\tilde{A}_n$  型 Coxeter 群所有的非平凡不可约 A1-表示。

证明：设  $V$  为  $W$  的不可约表示，并满足条件 (A1)。  $W$  为仿射 Weyl 群，熟知仿射 Weyl 群的不可约表示都是有限维的 (可见 [23])。记  $V_-^i$  为  $s_i$  的  $-1$ -特征向量构成的子空间，则  $\dim V_-^0 < \infty$ 。限制到二面体群  $\langle s_0, s_1 \rangle \simeq D_3$  上， $V$  分解为不可约表示  $\mathbf{1}$ ， $\varepsilon$  和  $\rho_1$  的若干次直和。条件 (A1) 保证了  $\varepsilon$  不会出现在  $V$  的该分解中，因此  $V_-^0 \cap V_-^1 = 0$  且  $\dim V_-^0 = \dim V_-^1$ 。类似的结论对任意一对相邻顶点  $i, i+1$  都成立 (视  $n+1$  为 0)。

若  $V$  不是平凡表示, 则  $V_-^0 \neq 0$ . 取  $V_-^0$  的一组基, 记为  $\{\alpha_{0,j}\}_{j=1,\dots,r}$ . 令

$$\alpha_{1,j} := s_1 \cdot \alpha_{0,j} - \alpha_{0,j}, \quad j = 1, \dots, r,$$

那么  $\{\alpha_{1,j}\}_{j=1,\dots,r}$  成为  $V_-^1$  的一组基, 且对任意的  $j$ ,  $\{\alpha_{0,j}, \alpha_{1,j}\}$  张成  $\langle s_0, s_1 \rangle$  的一个子表示, 同构于  $\rho_1$ . 把同样的讨论归纳地应用在子群  $\langle s_1, s_2 \rangle, \dots, \langle s_{n-1}, s_n \rangle$  上, 我们得到  $V_-^i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 的一组基  $\{\alpha_{i,j}\}_j$ , 使得对任意的  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq r$ ,  $\{\alpha_{i-1,j}, \alpha_{i,j}\}$  张成  $\langle s_{i-1}, s_i \rangle$  的不可约表示  $\rho_1$ .

现在考虑  $\langle s_n, s_0 \rangle$ . 记

$$\alpha'_{0,j} := s_0 \cdot \alpha_{n,j} - \alpha_{n,j}, \quad j = 1, \dots, r,$$

那么对任意  $j$ ,  $\{\alpha_{n,j}, \alpha'_{0,j}\}$  张成了  $\langle s_n, s_0 \rangle$  的不可约表示  $\rho_1$ , 且  $\{\alpha'_{0,j}\}_j$  也是  $V_-^0$  的一组基. 于是存在矩阵  $X \in \text{GL}_r(\mathbb{C})$  使得

$$(\alpha'_{0,1}, \dots, \alpha'_{0,r}) = (\alpha_{0,1}, \dots, \alpha_{0,r}) \cdot X.$$

设  $v = (x_1, \dots, x_r)^T \in \mathbb{C}^r$  是  $X$  的一个特征向量, 相应的特征值为  $x \in \mathbb{C}^\times$ , 记

$$\alpha_i := \sum_{1 \leq j \leq r} x_j \alpha_{i,j}, \quad 0 \leq i \leq n, \quad \text{以及} \quad \alpha'_0 := \sum_{1 \leq j \leq r} x_j \alpha'_{0,j},$$

那么对任意  $1 \leq i \leq n$ ,  $\{\alpha_{i-1}, \alpha_i\}$  张成  $\langle s_{i-1}, s_i \rangle$  的二维表示  $\rho_1$ . 最后,  $\{\alpha_n, \alpha'_0\}$  张成  $\langle s_n, s_0 \rangle$  的二维表示  $\rho_1$ . 注意到

$$\alpha'_0 = (\alpha'_{0,1}, \dots, \alpha'_{0,r}) \cdot v = (\alpha_{0,1}, \dots, \alpha_{0,r}) \cdot X \cdot v = x(\alpha_{0,1}, \dots, \alpha_{0,r}) \cdot v = x\alpha_0.$$

考虑由  $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  张成的子空间, 记为  $V'$ , 我们断言  $V'$  是  $W$  在  $V$  中的子表示, 并且满足条件 (R).

对任意一对  $0 \leq i, i' \leq n$  使得  $s_i, s_{i'}$  在  $G$  中不相邻, 有  $s_i s_{i'} = s_{i'} s_i$ , 因此  $s_i \cdot \alpha_{i'} \in V_-^{i'}$ , 从而  $s_i \cdot \alpha_{i'} - \alpha_{i'} \in V_-^i \cap V_-^{i'}$ .  $V$  是  $\mathbf{R}$ -表示, 迫使  $V_-^i \cap V_-^{i'} = 0$ , 故  $s_i \cdot \alpha_{i'} = \alpha_{i'}$ . 至此我们可以看出  $W$  的作用保持  $V'$ , 因此  $V'$  是子表示, 并且在相差一个数乘的意义下, 任意的  $s_i$  在  $V'$  中只有唯一的  $-1$ -特征向量, 即  $\alpha_i$ , 因此  $V'$  是一个  $\mathbf{R}$ -表示.

由假设  $V$  不可约, 当  $x \neq 1$  时,  $V = V' \simeq V_x$ ; 当  $x = 1$  时,  $V = V'$  同构于  $V_{\text{geom}}$  的不可约商.  $\square$

该命题表明,  $\tilde{A}_n$  型 Coxeter 群所有非平凡不可约 A1-表示都是  $\mathbf{R}$ -表示. 利用类似论证, 在更一般的情形也可得到该结论. 记  $G$  为  $(W, S)$  的 Coxeter 图.

**定理 4.6.3** 设  $(W, S)$  为不可约单连丝型 Coxeter 系统, 且  $H_1(G)$  的秩为 0 或 1, 那么所有的非平凡不可约 A1-表示都是  $\mathbf{R}$ -表示. 特别地, 它们都是有限维的. 若  $H_1(G)$  的秩为 0, 即 Coxeter 图  $G$  是一个树, 那这样的表示是唯一的.

证明: 设  $V$  为  $W$  的不可约 A1-表示, 记  $V_-^s$  为  $s$  的  $-1$ -特征子空间. 若  $G$  是一个树, 取定  $s \in S$ , 与 4.6.2 的证明类似,  $V_-^s$  中的任一非零向量生成一个子表示, 且为  $\mathbf{R}$ -表示. 根据分类定理 4.3.5, 这样的表示唯一.

若  $H_1(G) \simeq \mathbb{Z}$ , 取  $G$  中的回路  $c$  为  $H_1(G)$  的生成元, 取  $s$  为  $c$  中的某一顶点。如同 4.6.2 的证明, 回路  $c$  给出  $V^s$  的一个线性自同构  $X$ 。与  $\tilde{A}_n$  型不同的是, 此时我们不知道  $V^s$  的维数是否有限, 不能得到  $X$  的特征向量。但此时  $V^s$  成为一元 Laurent 多项式环  $\mathbb{C}[X^{\pm 1}]$  的模, 根据 Hilbert 零点定理,  $\mathbb{C}[X^{\pm 1}]$  的不可约模都是一维的, 因此若  $V^s$  维数大于 1, 那么存在子模  $V_0 \subsetneq V^s$ 。而与上面证明类似,  $V_0$  生成了  $W$  在  $V$  中的一个真子表示, 与  $V$  不可约矛盾。□

受此证明启发, 对某些 Coxeter 系统, 我们可以利用图  $G$  的基本群的无穷维不可约表示构造出  $W$  的无穷维不可约表示, 见 4.7 节。

#### 4.7 图的基本群和无穷维表示

在 4.6.3 的证明中, 若  $H_1(G)$  的秩不小于 2, 即  $G$  中有多个回路, 取定  $s_0 \in S$ , 取闭路径  $c_1, c_2, \dots, c_l$  为  $H_1(G)$  的一组基, 其中  $l \geq 2$  是  $H_1(G)$  的秩。我们所说的闭路径允许有重复的顶点, 因此可以选取上述闭路径使得  $s_0$  落在各  $c_i$  上。记  $V_-^0$  为  $s_0$  在 A1-表示  $V$  上的  $-1$ -特征子空间, 沿着各闭路径  $c_i$  我们得到  $V_-^0$  的  $l$  个线性自同构, 于是  $V_-^0$  成为  $l$  个生成元的自由群的表示。这个自由群正是图  $G$  的基本群, 见 [35, Theorem 84.7]:

**引理 4.7.1**  $\pi_1(G)$  是秩为  $l$  的自由群, 以  $c_1, \dots, c_l$  为一组自由生成元。

记  $F = F(X_1, \dots, X_l)$  为自由群, 以  $X_1, \dots, X_l$  为自由生成元。  $F$  有无穷维不可约表示, 例如, 记  $U = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}\alpha_n$ , 令

$$X_1 \cdot \alpha_n = \alpha_{n+1}, \quad X_2 \cdot \alpha_n = 2^n \alpha_{n+1}, \quad X_i \cdot \alpha_n = \alpha_n, \quad \forall i \geq 3,$$

则  $U$  是  $F$  的不可约表示。在上一段中, 如果  $V_-^0$  作为  $F$  的表示同构于  $U$ , 便可借此得到  $(W, S)$  的无穷维不可约表示。这样的构造可以规避单连丝型的假设。

**4.7.2** 在整个 4.7 节中, 假设  $(W, S)$  是不可约 Coxeter 系统, 且  $H_1(G)$  的秩不小于 2。为说话方便, 我们还可进一步假设  $m_{st} < \infty$ ,  $\forall s, t \in S$ 。这不是本质的, 若有某些  $m_{st}$  为无穷, 将它们全部替换为大于 2 的整数 (比如 3), 我们得到另一个 Coxeter 系统  $(W_1, S)$ , 且有满同态  $W \twoheadrightarrow W_1, s \mapsto s$ 。忽略边上的标记, 这两个 Coxeter 系统具有拓扑意义上相同的 Coxeter 图。  $W_1$  的不可约表示通过该同态拉回就得到了  $W$  的不可约表示。

设  $T = (S, E_0)$  是  $G = (S, E)$  的一个极大树。如同 4.1.2, 对任意  $E \setminus E_0$  中的边  $e$ , 记  $c_e$  为  $E_0 \cup \{e\}$  中含有  $e$  的回路 (任意取定这个回路的方向)。取遍  $E \setminus E_0$  中的边  $e$ , 我们得到  $H_1(G)$  的一组基, 记为  $c'_1, \dots, c'_l$ 。选定  $s_0 \in S$ , 对每一  $c'_i$ , 在  $T$  中取定从  $s_0$  到  $c'_i$  上某一顶点的路径  $p_i$ , 并记  $c_i$  为  $p_i, c'_i, p_i^{-1}$  连成的闭路径, 这里  $p_i^{-1}$  是  $p_i$  的反向路径, 于是  $c_1, \dots, c_l$  为  $G$  的基本群的一组自由生成元。取定  $\{s_1, t_1\}, \{s_2, t_2\}$  为  $E \setminus E_0$  中的两条边, 可以假设  $\{s_1, t_1\}, \{s_2, t_2\}$  分别是  $c_1, c_2$  中相邻的顶点 (这两条边可能共用一个顶点, 比如可能出现  $s_1 = s_2$  的情况, 这不影响后面的构造)。如此一来, 作为边  $\{s_1, t_1\}$  只在  $c_1$  中出现而不在其他  $c_i$  中



出现, 且在  $c_1$  中只出现一次,  $\{s_2, t_2\}$  类似地只在  $c_2$  中出现且只有一次。令

$$V := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}, s \in S} \mathbb{C}\alpha_{s,n}.$$

对任意  $s, t \in S$ , 定义  $s \cdot \alpha_{t,n}$  如下,

- (1) 若  $s = t$ ,  $s \cdot \alpha_{s,n} := -\alpha_{s,n}$ ;
- (2)  $s_1 \cdot \alpha_{t_1,n} := \alpha_{t_1,n} + 2 \cos \frac{\pi}{m_{s_1 t_1}} \alpha_{s_1, n+1}$ ,  
 $t_1 \cdot \alpha_{s_1, n+1} := \alpha_{s_1, n+1} + 2 \cos \frac{\pi}{m_{s_1 t_1}} \alpha_{t_1, n}$ ;  
 $s_2 \cdot \alpha_{t_2, n} := \alpha_{t_2, n} + 2^{n+1} \cos \frac{\pi}{m_{s_2 t_2}} \alpha_{s_2, n+1}$ ,  
 $t_2 \cdot \alpha_{s_2, n+1} := \alpha_{s_2, n+1} + 2^{-n+1} \cos \frac{\pi}{m_{s_2 t_2}} \alpha_{t_2, n}$ ;
- (3) 若无序顶点对  $\{s, t\} \neq \{s_1, t_1\}$  和  $\{s_2, t_2\}$ , 且  $s \neq t$ ,  $s \cdot \alpha_{t,n} := \alpha_{t,n} + 2 \cos \frac{\pi}{m_{st}} \alpha_{s,n}$ 。

在情形 (2),  $\{\alpha_{t_1, n}, \alpha_{s_1, n+1}\}$  和  $\{\alpha_{t_2, n}, 2^n \alpha_{s_2, n+1}\}$  分别张成  $\langle s_1, t_1 \rangle$  和  $\langle s_2, t_2 \rangle$  的不可约表示  $\rho_1$ 。在情形 (3), 若  $m_{st} = 2$ ,  $s \cdot \alpha_{t,n} = \alpha_{t,n}$ ; 若  $m_{st} \geq 3$ ,  $\{\alpha_{t,n}, \alpha_{s,n}\}$  张成  $\langle s, t \rangle$  的不可约表示  $\rho_1$ 。

**引理 4.7.3** 在上述作用下  $V$  成为  $W$  的表示。

证明:  $s^2$  的作用显然为恒等映射。若  $s, t \in S$ ,  $m_{st} = 2$ , 也显然有  $st \cdot \alpha_{r,n} = ts \cdot \alpha_{r,n}$ ,  $\forall r \in S$ 。下面假设  $m_{st} \geq 3$ , 需验证  $(st)^{m_{st}} \cdot \alpha_{r,n} = \alpha_{r,n}$ 。若  $r = s$  或  $r = t$ , 这也是显然的。下面假设  $s, t, r$  互异, 分如下几种情况讨论。

(1) 若  $s, t, r$  中任意一对元素都不为  $\{s_1, t_1\}$  和  $\{s_2, t_2\}$ , 则  $\alpha_{r,n}, \alpha_{s,n}, \alpha_{t,n}$  在  $V$  中张成的三维子空间 (记为  $U$ ) 在  $s$  和  $t$  作用下保持不动。记  $U_s := \{v \in U \mid s \cdot v = v\}$ ,  $U_t := \{v \in U \mid t \cdot v = v\}$ , 则  $\dim U_s = \dim U_t = 2$ , 因此存在  $0 \neq v_0 \in U$ , 使得  $s \cdot v_0 = t \cdot v_0 = v_0$ 。注意到  $3 \leq m_{st} < \infty$ ,  $\mathbb{C}\alpha_{s,n} \oplus \mathbb{C}\alpha_{t,n}$  构成  $\langle s, t \rangle$  的不可约表示, 同构于  $\rho_1$ , 因此  $v_0 \notin \mathbb{C}\alpha_{s,n} \oplus \mathbb{C}\alpha_{t,n}$ , 从而  $\{v_0, \alpha_{s,n}, \alpha_{t,n}\}$  是  $U$  的一组基。现在我们可以看出  $(st)^{m_{st}} \cdot \alpha_{r,n} = \alpha_{r,n}$ 。

(2) 若  $m_{rt} = 2$ , 则存在  $k \in \{n-1, n, n+1\}$ , 及  $q \in \{k-1, k, k+1\}$ , 使得  $\alpha_{r,n}, \alpha_{s,k}, \alpha_{t,q}$  在  $V$  中张成的三维子空间在  $s$  和  $t$  作用下保持不动, 与 (1) 同理有  $(st)^{m_{st}} \cdot \alpha_{r,n} = \alpha_{r,n}$ 。  $m_{rs} = 2$  的情形是类似的。

下面的情况都假设  $s, r, t$  两两不交换。

(3) 若  $s = s_1$ ,  $t = t_1$ , 而  $s_2, t_2$  不全出现在  $s, r, t$  中, 则  $\alpha_{s_1, n+1}, \alpha_{t_1, n}, \alpha_{r,n}, \alpha_{s_1, n}, \alpha_{t_1, n-1}$  在  $V$  中张成五维的  $s, t$ -不变子空间, 记为  $U$ 。如 (1) 中定义  $U_s$  和  $U_t$ , 则  $\dim U_s = \dim U_t = 3$ 。相同的论证表明  $(s_1 t_1)^{m_{s_1 t_1}} \cdot \alpha_{r,n} = \alpha_{r,n}$ 。

(4) 若  $s = s_1$ ,  $r = t_1$ , 而  $s_2, t_2$  不全出现在  $s, r, t$  中, 则  $\alpha_{s_1, n}, \alpha_{t_1, n}, \alpha_{r,n}, \alpha_{s_1, n+1}, \alpha_{t_1, n+1}$  在  $V$  中张成一个五维的  $s, t$ -不变子空间。和 (3) 相同的分析推出  $(s_1 t_1)^{m_{s_1 t_1}} \cdot \alpha_{r,n} = \alpha_{r,n}$ 。

(5) 若  $s = s_1$ ,  $t = t_1 = t_2$ ,  $r = s_2$ , 则  $\alpha_{r,n}, \alpha_{s_1, n}, \alpha_{t_1, n-1}$  在  $V$  中张成一个  $s, t$ -不变子空间, 同理。

(6) 若  $s = s_1$ ,  $t = t_1 = s_2$ ,  $r = t_2$ , 则  $\alpha_{t_1, n-1}, \alpha_{s_1, n}, \alpha_{r,n}, \alpha_{s_2, n+1}, \alpha_{s_1, n+2}$  在  $V$  中张成一个  $s, t$ -不变子空间, 同理。

(7) 若  $s = s_1, t = s_2, r = t_1 = t_2$ , 则  $\alpha_{s_1, n+1}, \alpha_{r, n}, \alpha_{s_2, n+1}$  在  $V$  中张成一个  $s, t$ -不变子空间, 同理。

(8) 若  $s = s_1, t = t_2, r = t_1 = s_2$ , 则  $\alpha_{t_2, n+1}, \alpha_{s_1, n+1}, \alpha_{r, n}, \alpha_{t_2, n-1}, \alpha_{s_1, n-1}$  在  $V$  中张成一个  $s, t$ -不变子空间, 同理。

把上述情形中的字母  $s, t$  互换或指标  $1, 2$  互换, 相应的讨论是完全一样的。因此总有  $(st)^{m_{st}} \cdot \alpha_{r, n} = \alpha_{r, n}$ 。□

记  $V_0 := \{v \in V \mid s \cdot v = v, \forall s \in S\}$ 。

**定理 4.7.4** 设  $(W, S)$  为不可约 Coxeter 系统, 且  $H_1(G)$  的秩不小于 2, 则上文构造的  $V/V_0$  是  $W$  的无穷维不可约表示。

证明: 记  $V_-^s$  为  $s$  在  $V$  上的  $-1$ -特征子空间, 则  $V_-^s = \bigoplus_n \mathbb{C}\alpha_{s, n}$ 。设  $\{s, t\}$  是  $G$  中的一条边, 则  $V_-^s \oplus V_-^t$  是  $\langle s, t \rangle$  在  $V$  中的子表示, 且是可数个  $\rho_1$  的直和。对  $v \in V_-^s$ , 记  $f_{st}(v) := (t \cdot v - v)/2 \cos \frac{\pi}{m_{st}}$ , 则线性映射  $f_{st} : V_-^s \rightarrow V_-^t$  是两个线性空间之间的同构。例如, 当  $\{s, t\} \neq \{s_1, t_1\}$  和  $\{s_2, t_2\}$  时,  $f_{st}(\alpha_{s, n}) = \alpha_{t, n}$ 。特别地,  $f_{st}(v)$  属于  $v$  生成的子表示。

设  $0 \neq v \in V$ , 记  $U$  为  $v$  生成的子表示。与 4.3.1 的讨论类似, 若  $v \notin V_0$ , 比如  $t \cdot v \neq v$ , 则  $V_-^t$  中存在非零向量  $v_t$  属于  $U$ 。取连接  $t$  和  $s_0$  的一条路径  $(r_0 = t, r_1, \dots, r_k = s_0)$ , 这里  $s_0$  是 4.7.2 中取定的顶点, 则  $f_{r_{k-1}r_k} \cdots f_{r_1r_2} f_{r_0r_1}(v_t) \in V_-^0 \cap U$ 。将该向量记作  $v_0, 0 \neq v_0 \in V_-^0 \cap U$ 。

沿着 4.7.2 中选好的闭路径  $c_1, \dots, c_l$  分别作用上面的映射  $f_{**}$ , 我们得到  $V_-^0$  上的  $l$  个线性自同构, 这使得  $V_-^0$  成为图  $G$  基本群  $F$  的表示。除了  $c_1$  和  $c_2$ , 其它  $c_i$  给出的都是  $V_-^0$  上的恒等映射, 而  $c_1, c_2$  给出的映射使  $V_-^0$  作为  $G$  的表示是不可约的。由于已有  $0 \neq v_0 \in V_-^0 \cap U$ ,  $v_0$  在  $V_-^0$  中生成的  $F$  的子表示也包含于  $U$ , 因此  $V_-^0 \subseteq U$ 。而  $V_-^0$  在  $V$  中生成的  $W$  的子表示为整个  $V$ , 进而  $U = V$ 。至此我们证明了  $V/V_0$  是  $W$  的不可约表示。又注意到  $s_0$  在  $V_-^0$  上的作用为  $-1$ , 故  $V_-^0 \cap V_0 = 0$ , 因此  $\dim V/V_0 = \infty$ 。□

根据构造,  $V$  显然是 A1-表示。由 3.3.5,  $V/V_0$  也是 A1-表示。

#### 4.8 图的万有覆盖和无穷维表示

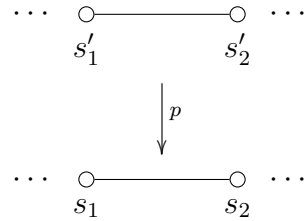
设不可约 Coxeter 系统  $(W, S)$  的 Coxeter 图为  $G = (S, E)$ 。上一节中我们看到, 当  $H_1(G)$  的秩不小于 2 时, 可以构造出  $W$  的无穷维不可约 A1-表示。如果  $H_1(G)$  的秩为 1, 这个构造方法失效。此时如果  $W$  是单连丝型, 4.6.3 告诉我们所有 A1-表示都是有限维的。如果不是单连丝型, 我们仍可以构造出  $W$  的无穷维不可约 A1-表示, 这便是本节的主要目的。

在这一节中, 我们假设  $G$  不是一个树, 即  $G$  中存在回路, 并假设  $G$  中存在一条边  $\{s_1, s_2\}$  使得  $4 \leq m_{s_1 s_2} < \infty$ 。在这一节中我们将利用  $G$  的万有覆盖构造出  $W$  的无穷维不可约表示。

为说话方便, 我们假设了  $m_{s_1 s_2} < \infty$ , 与 4.7.2 同理, 这不是本质的, 若

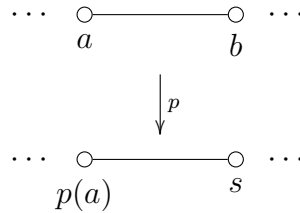
$m_{s_1 s_2} = \infty$ , 将  $m_{s_1 s_2}$  改为一个不小于 4 的整数, 便可通过表示的拉回得到原来的群的不可约表示。

**4.8.1** 设  $p : G' \rightarrow G$  是  $G$  的万有覆盖,  $G' = (S', E')$ 。取定  $G'$  中的一条边  $\{s'_1, s'_2\}$  使得  $p(s'_1) = s_1, p(s'_2) = s_2$ , 如下图所示。



令  $V := \bigoplus_{a \in S'} \mathbb{C}\alpha_a$ 。对任意的  $s \in S$ , 定义  $s \cdot \alpha_a$  如下,

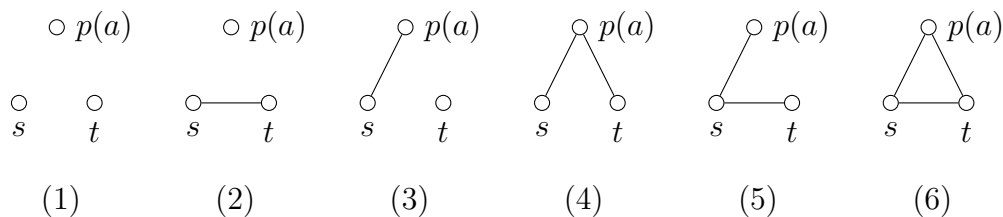
- (1) 若  $s = p(a)$ , 则  $s \cdot \alpha_a := -\alpha_a$ ;
- (2) 若  $s = s_1, a = s'_2$ , 则  $s_1 \cdot \alpha_{s'_2} := \alpha_{s'_2} + 2 \cos \frac{2\pi}{m_{s_1 s_2}} \alpha_{s'_1}$ ;
- (3) 若  $s = s_2, a = s'_1$ , 则  $s_2 \cdot \alpha_{s'_1} := \alpha_{s'_1} + 2 \cos \frac{2\pi}{m_{s_1 s_2}} \alpha_{s'_2}$ ;
- (4) 若非以上情况, 且  $s$  与  $p(a)$  不相邻, 则  $s \cdot \alpha_a := \alpha_a$ ;
- (5) 若非以上情况,  $s$  与  $p(a)$  相邻, 如下图所示, 记  $b$  为  $p^{-1}(s)$  中与  $a$  相邻的顶点,  $m_{s, p(a)} = m \geq 3$ , 则  $s \cdot \alpha_a := \alpha_a + 2 \cos \frac{\pi}{m} \alpha_b$  (视  $\cos \frac{\pi}{\infty} = 1$ )。



特别地,  $\mathbb{C}\alpha_{s'_1} \oplus \mathbb{C}\alpha_{s'_2}$  构成二面体群  $\langle s_1, s_2 \rangle$  的表示  $\rho_2$  (注意  $m_{s_1 s_2} \geq 4$ ), 而对  $G'$  中其他相邻的顶点对  $\{a, b\}$ , 若相应的  $m$  有限, 则  $\mathbb{C}\alpha_a \oplus \mathbb{C}\alpha_b$  构成  $\langle p(a), p(b) \rangle$  的不可约表示  $\rho_1$ , 或可约表示  $\varrho_4$  如果  $m$  为  $\infty$ 。另外, 表示  $V$  满足条件 (A1)。

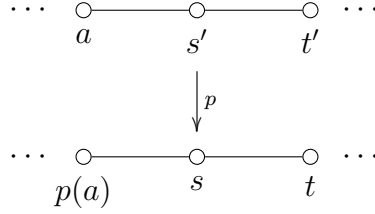
**引理 4.8.2** 以上定义使  $V$  成为  $W$  的表示。

证明: 从定义中容易验证  $s^2$  的作用为恒等映射。需要对任意一对满足  $m_{st} < \infty$  的  $s, t \in S$  验证  $(st)^{m_{st}}$  的作用也为恒等映射。任取  $a \in S'$ , 若  $p(a) = s$  或  $t$ , 则  $\alpha_a$  落在  $\langle s, t \rangle$  的一个子表示里, 有  $(st)^{m_{st}} \cdot \alpha_a = \alpha_a$ 。若  $p(a) \neq s$  且  $p(a) \neq t$ , 那么  $p(a), s, t$  三个顶点在  $G$  中的相对关系有下面几种情况 (忽略边上的标记  $m_{st}$  等),



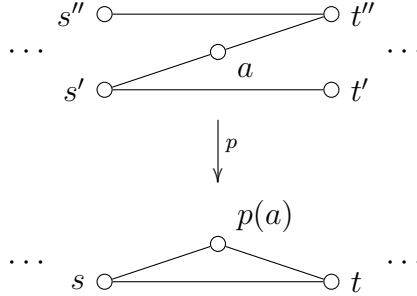
(若  $(st)^{m_{st}}$  作用为 Id, 从  $s^2$  作用为 Id 可推出  $(ts)^{m_{st}}$  作用也为 Id, 因此省略了上图 (3) (5) 关于  $s, t$  对称的情形。) 图 (1) (3) (4) 的情形下都可根据定义直接验证  $st \cdot \alpha_a = ts \cdot \alpha_a$ 。在图 (2) 的情形也显然有  $(st)^{m_{st}} \cdot \alpha_a = \alpha_a$ 。

若是图 (5) 的情形, 记  $s'$  为  $p^{-1}(s)$  中与  $a$  相邻的顶点, 记  $t'$  为  $p^{-1}(t)$  中与  $s'$  相邻的顶点, 则  $a$  与  $t'$  不相邻, 如下图所示,



$\alpha_a, \alpha_{s'}, \alpha_{t'}$  张成的三维子空间, 记为  $U$ , 在  $s, t$  的作用下封闭。记  $U_s := \{v \in U \mid s \cdot v = v\}$ ,  $U_t := \{v \in U \mid t \cdot v = v\}$ , 则  $\dim U_s = \dim U_t = 2$ , 因此存在  $0 \neq v_0 \in U$ , 使得  $s \cdot v_0 = t \cdot v_0 = v_0$ 。注意  $m_{st} < \infty$ ,  $\mathbb{C}\alpha_{s'} \oplus \mathbb{C}\alpha_{t'}$  构成  $\langle s, t \rangle$  的表示  $\rho_1$  或  $\rho_2$ , 故  $v_0 \notin \mathbb{C}\alpha_{s'} \oplus \mathbb{C}\alpha_{t'}$ ,  $v_0, \alpha_{s'}, \alpha_{t'}$  构成  $U$  的一组基。因此  $(st)^{m_{st}} \cdot \alpha_a = \alpha_a$ 。

若是图 (6) 的情形, 记  $s'$  为  $p^{-1}(s)$  中与  $a$  相邻的顶点,  $t'$  为  $p^{-1}(t)$  中与  $s'$  相邻的顶点, 记  $t''$  为  $p^{-1}(t)$  中与  $a$  相邻的顶点,  $s''$  为  $p^{-1}(s)$  中与  $t''$  相邻的顶点, 则  $a, t', s''$  互不相邻, 如下图所示,



那么  $\alpha_a, \alpha_{s'}, \alpha_{s''}, \alpha_{t'}, \alpha_{t''}$  张成的五维子空间, 也记为  $U$ , 在  $s, t$  的作用下封闭。和上一段同样定义  $U_s$  和  $U_t$ ,  $\dim U_s = \dim U_t = 3$ , 从而存在  $0 \neq v_0 \in U$ ,  $s \cdot v_0 = t \cdot v_0 = v_0$ 。同样的原因  $v_0, \alpha_{s'}, \alpha_{s''}, \alpha_{t'}, \alpha_{t''}$  成为  $U$  的一组基, 从而  $(st)^{m_{st}} \cdot \alpha_a = \alpha_a$ 。□

任取  $G'$  中的两个顶点  $a, b$ , 由于  $G'$  是一个树, 在  $G'$  中存在唯一的无重复路径  $(a = t_0, t_1, \dots, t_n = b)$  连接  $a, b$ , 这里无重复的意思是各  $t_i$  互异。称  $d(a, b) := n$  为  $a$  与  $b$  的距离。记

$$S'_1 := \{a \in S' \mid d(a, s'_1) < d(a, s'_2)\}, \quad S'_2 := \{a \in S' \mid d(a, s'_2) < d(a, s'_1)\},$$

则其中有一个为无穷集, 不妨设  $|S'_1| = \infty$ 。记

$$V_1 := \bigoplus_{a \in S'_1} \mathbb{C}\alpha_a, \quad V_0 := \{v \in V \mid s \cdot v = v, \forall s \in S\},$$

则  $\dim V_1 = \infty$ 。若  $m_{s_1 s_2} = 4$ ，根据定义易知  $V_1$  是  $W$  在  $V$  中的子表示 (否则，只视为线性子空间)。

**引理 4.8.3** (1) 设  $m_{s_1 s_2} > 4$ ， $v \in V \setminus V_0$ ，则  $V$  作为表示由向量  $v$  生成。

(2) 设  $m_{s_1 s_2} = 4$ ， $v_1 \in V_1 \setminus V_0$ ，则  $V_1$  由  $v_1$  生成。

**证明：** (1) 设  $s \cdot v \neq v$ ，根据构造知  $v - s \cdot v$  形如  $\sum_{a \in p^{-1}(s)} x_a \alpha_a$ ，其中各  $x_a \in \mathbb{C}$  且只有有限多个非零。记  $u_0 := v - s \cdot v$ ， $U$  为  $v$  生成的表示，则  $u_0 \in U$ 。取  $a_0 \in p^{-1}(s)$  使得  $x_{a_0} \neq 0$ ，设  $G'$  中连接  $a_0$  和  $s'_1$  的无重复路径为

$$(a_0, a_1, \dots, a_n = s'_1),$$

记  $t_i := p(a_i) \in S$ ，令  $u_i := u_{i-1} - t_i \cdot u_{i-1}$ 。归纳可知， $u_i$  形如  $\sum_{b \in p^{-1}(t_i)} x_{i,b} \alpha_b$ ，且由于  $p$  是覆盖映射， $p^{-1}(t_{i-1})$  中与  $a_i$  相邻的顶点只有  $a_{i-1}$ ，故  $u_i$  的表达式中  $\alpha_{a_i}$  的系数  $x_{i,a_i}$  非零。取  $i = n$ ，知  $u_n \in U$  且  $\alpha_{s'_1}$  的系数非零。

将  $V$  视为有限二面体群  $D := \langle s_1, s_2 \rangle$  的表示。由于群代数  $\mathbb{C}[D]$  是半单的， $V$  分解为  $D$  的若干不可约表示的直和。从 4.8.2 的证明以及  $V$  的构造中可以看出，出现在  $V$  中的  $D$  的不可约表示只有  $\mathbb{1}, \rho_1, \rho_2$ ，并且  $\rho_2$  只出现一次，即  $\mathbb{C}\alpha_{s'_1} \oplus \mathbb{C}\alpha_{s'_2}$ 。因此，存在群代数中的元素  $d \in \mathbb{C}[D]$  使得  $d \cdot u_n = \alpha_{s'_1}$ ，因此  $\alpha_{s'_1} \in U$ 。 $G'$  是连通的，根据  $V$  的构造， $\alpha_{s'_1}$  生成整个  $V$ ，故  $U = V$ 。

(2) 若  $m_{s_1 s_2} = 4$ ，证明是类似的。与上面类似取顶点  $a_0$  使得  $\alpha_{a_0}$  在  $v_1 - s \cdot v_1$  的线性表示中系数非零，并对连接  $a_0$  和  $s'_1$  的无重复路径做相同的讨论，得知  $v_1$  生成的子表示中存在向量  $u_n$  满足  $\alpha_{s'_1}$  的系数非零。将  $V_1$  分解为  $D$  的不可约表示直和时只出现  $\mathbb{1}, \rho_1, \varepsilon_{s_1}$ ，且  $\varepsilon_{s_1}$  重数为 1，由  $\alpha_{s'_1}$  张成，从而  $\alpha_{s'_1}$  属于  $v_1$  生成的子表示。而  $\alpha_{s'_1}$  生成整个子表示  $V_1$ 。□

记

$$\bar{V} := V/V_0, \quad \bar{V}_1 := V_1/(V_1 \cap V_0),$$

同样地，若  $m_{s_1 s_2} \neq 4$ ，只把  $\bar{V}_1$  视为线性空间作商。

**定理 4.8.4** 若  $m_{s_1 s_2} > 4$ ，则  $\bar{V}$  是  $W$  的不可约表示；若  $m_{s_1 s_2} = 4$ ，则  $\bar{V}_1$  是  $W$  的不可约表示。而且它们都是无穷维的。

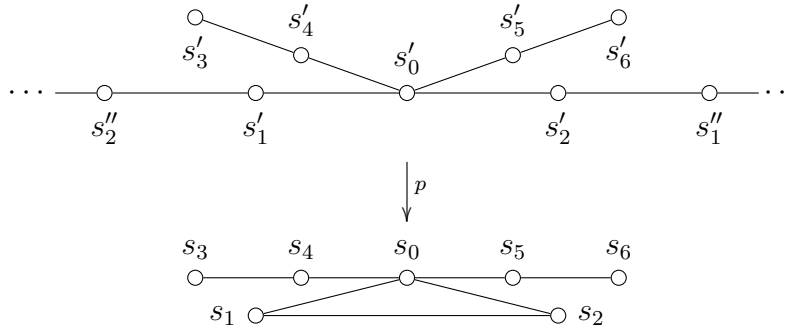
**证明：** 从 4.8.3 已知定理中提及的表示都是不可约的，因此只需证明它们是无穷维的。显然有  $\dim \bar{V} \geq \dim \bar{V}_1$ ，只需证明  $\dim \bar{V}_1 = \infty$ 。任取  $s \in S$ ， $p^{-1}(s) \cap S'_1$  是无穷集，记

$$U := \bigoplus_{a \in p^{-1}(s) \cap S'_1} \mathbb{C}\alpha_a,$$

则  $U \subseteq V_1$ ， $\dim U = \infty$ 。对  $0 \neq v \in U$ ，都有  $s \cdot v = -v$ ，从而  $U \cap V_0 = 0$ 。因此  $\bar{V}_1 = V_1/(V_1 \cap V_0)$  为无穷维。□

表示  $\bar{V}$  (和  $\bar{V}_1$ ，若  $m_{s_1 s_2} = 4$ ) 满足条件 (A1)。

注 4.8.5 定理中对具有平凡  $W$ -作用的子空间  $V_0$  作商是必要的,  $V_0$  可能非零。例如, 考虑如下的万有覆盖,



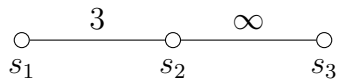
其中  $p(s'_i) = s_i, p(s''_i) = s_i, \forall i$ , 且  $m_{34} = m_{56} = \infty, m_{04} = m_{05} = 3, m_{01}, m_{02} \geq 3, m_{12} \geq 4$ , 此时  $\alpha_{s'_3} + \alpha_{s'_4} - \alpha_{s'_5} - \alpha_{s'_6}$  便在任意  $s_i$  的作用下保持不动。

自然地, 我们可以提出如下的猜测。

猜测 4.8.6 设  $(W, S)$  是不可约 Coxeter 系统。  $W$  的不可约表示都是有限维的当且仅当  $W$  是有限群或仿射 Weyl 群。

若该猜测成立, 可视为一个 Coxeter 系统为有限或仿射型的表示论的判定方法。充分性是熟知的: 对仿射 Weyl 群的情形, 可参见 [23], 或仿照 [37, §8.2] 的证明。除了有限和仿射型的完全分类之外, 我们也有其他一些判定方法。例如, 一个 Coxeter 系统为有限或仿射型当且仅当几何表示上的双线性型为正定或半正定, 见 3.1.2。在 [36] 中我们也得知, 一个无限的 Coxeter 群是仿射 Weyl 群当且仅当群代数中有非平凡的中心, 也等价于该群中存在非幺共轭类为有限集。

例 4.8.7 在 Coxeter 图  $G$  是一个树的情形, 也可能存在  $W$  的无穷维不可约表示。这里给一个例子。设  $G$  如下,



回顾在二面体群  $\langle s_1, s_2 \rangle$  的不可约表示  $\rho_1$  中存在一组基  $u, v$  使得  $s_1 \cdot u = u, s_1 \cdot v = -v$ 。若采用 3.2.1 的记号,  $u, v$  可选取为  $u = \beta_{s_1} + 2\beta_{s_2}, v = \beta_{s_1}$ 。而  $s_2$  在这组基上的作用为  $s_2 \cdot u = (3v - u)/2, s_2 \cdot v = (u + v)/2$ 。令

$$V := \mathbb{C}u_0 \oplus \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_{>0}} (\mathbb{C}u_i \oplus \mathbb{C}v_i),$$

并令  $s_1, s_2$  在  $V$  上的作用为

$$\begin{aligned} s_1 \cdot u_0 &= s_2 \cdot u_0 = u_0, \\ s_1 \cdot u_i &= u_i, \quad s_1 \cdot v_i = -v_i, \quad \forall i \in \mathbb{N}_{>0}, \end{aligned}$$

$$s_2 \cdot u_i = \frac{3v_i - u_i}{2}, \quad s_2 \cdot v_i = \frac{u_i + v_i}{2}, \quad \forall i \in \mathbb{N}_{>0}.$$

于是, 作为  $\langle s_1, s_2 \rangle$  的表示,  $V$  是平凡表示  $\mathbf{1}$  和无穷个  $\rho_1$  的直和。想让  $V$  成为  $W$  的表示, 只需让  $s_3$  在  $V$  上的作用为一个对合, 并且和  $s_1$  的作用交换即可。令

$$\begin{aligned} s_3 \cdot u_{2k} &= u_{2k+1}, & s_3 \cdot u_{2k+1} &= u_{2k}, & \forall k \in \mathbb{N}, \\ s_3 \cdot v_{2k} &= v_{2k-1}, & s_3 \cdot v_{2k-1} &= v_{2k}, & \forall k \in \mathbb{N}_{>0}, \end{aligned}$$

直观上,  $s_3$  置换这些基向量:

$$\begin{array}{ccccccc} u_0 & \longleftrightarrow & u_1 & & u_2 & \longleftrightarrow & u_3 & & u_4 & \longleftrightarrow & \cdots \\ & & | & & | & & | & & | & & \\ & & v_1 & \longleftrightarrow & v_2 & & v_3 & \longleftrightarrow & v_4 & & \cdots \end{array}$$

显然,  $s_3$  的作用和  $s_1$  交换, 并且  $s_3^2$  作用为恒等映射, 从而  $V$  成为  $W$  的表示。与 4.8.3 的证明类似,  $u_0$  落在  $V$  的任意非零子表示中, 而  $u_0$  又生成整个表示  $V$ , 因此  $V$  是  $W$  的不可约表示。不过  $V$  不满足条件 (A1)。

## 第 5 章 秩 3 Coxeter 群几何表示的张量积

本章考虑秩为 3 的 Coxeter 群几何表示的任意次张量积，除了少数几个有限型和仿射型之外，其余 (称为双曲型) 的秩 3 Coxeter 群几何表示的张量积都是半单的，其半单分解都遵循 Clebsch-Gordan 的模式。从中我们发现这些 Coxeter 群的表示论和有限型与仿射型的有很大的不同。

所用的方法来自于 Chevalley 的一个定理，把抽象群表示的问题转化为它在  $GL(V)$  中的像的 Zariski 闭包的问题，而在我们的考虑中，这个闭包为  $A_1$  型简约代数群。

### 5.1 Chevalley 的表示张量积定理

在 [10] 中，Chevalley 给出了一个十分广泛的定理。

**定理 5.1.1** 设  $K$  为特征零的域， $G$  为任意给定的抽象群， $V_1, V_2$  为  $G$  在  $K$  上的两个半单的有限维表示，则  $V_1 \otimes V_2$  也是半单的。

我们回顾一下该定理的证明，它对后面的工作有帮助。

**引理 5.1.2** (1) 设  $k \subseteq K$  为域扩张， $A$  是  $k$  上的有限维结合代数。假设  $A \otimes_k K$  是半单的  $K$  代数，则  $A$  是半单的  $k$  代数。

(2) 设  $V$  为有限维的  $k$  线性空间， $A \subseteq \text{End}_k(V)$  为子代数，那么  $A$  半单当且仅当  $V$  作为  $A$  模是半单的。

(3) 设  $G$  为群， $k \subseteq K$  如上， $V$  是  $G$  在  $k$  上的一个有限维表示。假设  $V \otimes_k K$  是  $G$  在  $K$  上的半单表示，则  $V$  是  $G$  在  $k$  上的半单表示。

**证明：**(1) 有限维代数的半单性等价于 Jacobson 根 (radical) 为零。Rad( $A$ ) 为  $A$  的幂零理想，易知 Rad( $A$ )  $\otimes_k K$  是  $A \otimes_k K$  的幂零理想，因此 Rad( $A$ )  $\otimes_k K \subseteq \text{Rad}(A \otimes_k K) = 0$ ，因此 Rad( $A$ ) = 0。或参见 [26, Theorem 5.14]。

(2) 必要性不需说明。充分性： $V$  是半单  $A$  模，若 Rad( $A$ )  $\neq 0$ ，它在  $V$  上的作用为零，这与  $A \subseteq \text{End}_k(V)$  矛盾。

(3) 设表示的映射为  $\rho : G \rightarrow GL(V)$ ，记  $A$  为  $\text{End}_k(V)$  的由  $\text{Im } \rho$  生成的子代数。记  $V_K := V \otimes_k K$ ， $A_K := A \otimes_k K$ ，则  $A_K$  为  $\text{End}_K(V_K)$  的由  $\text{Im } \rho_K$  生成的子代数，其中  $\rho_K : G \rightarrow GL(V_K)$  为自然的系数扩张。用记号  ${}_G V$  或  ${}_A V$  表示将  $V$  视为  $G$  或  $A$  的模，其余类似。我们有如下的逻辑关系，

$$\begin{array}{ccccc} {}_G V_K \text{ s.s.} & \iff & {}_{A_K} V_K \text{ s.s.} & \xleftrightarrow{\text{由(2)}} & A_K \text{ s.s.} \\ & & & & \downarrow \text{由(1)} \\ {}_G V \text{ s.s.} & \iff & {}_A V \text{ s.s.} & \xleftrightarrow{\text{由(2)}} & A \text{ s.s.} \end{array}$$

其中“s.s.”为“半单”的缩写。 □



**引理 5.1.3** 设域  $K$  特征为零,  $G$  为一个群,  $N$  是  $G$  的一个有限指标的正规子群,  $V$  为  $G$  在  $K$  上的一个有限维表示. 假设  $V$  作为  $N$  的表示是半单的, 则  $V$  作为  $G$  的表示也是半单的.

**证明:** 仿照 Maschke 定理的证明. 设  $V_1 \subseteq V$  为  $G$  在  $V$  中的一个子表示, 则存在  $N$  表示的补, 记为  $V_2$ . 记  $\pi_0 : V = V_1 \oplus V_2 \rightarrow V_1$  为自然的投射. 取  $G/N$  的一组代表元  $\{g_1, \dots, g_k\}$ , 定义映射

$$\begin{aligned} \pi : V &\rightarrow V_1, \\ v &\mapsto \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k g_i(\pi_0(g_i^{-1}v)). \end{aligned}$$

容易验证  $\pi$  的定义与代表元集的选取无关, 且  $\pi|_{V_1} = \text{Id}_{V_1}$ . 通过计算不难验证对任意的  $g \in G$ ,  $\pi(gv) = g\pi(v)$ , 即  $\pi$  是  $G$  表示的同态, 特别地,  $\text{Ker } \pi$  是  $G$  在  $V$  中的子表示. 因此, 作为  $G$  的表示  $V = V_1 \oplus \text{Ker } \pi$ .  $\square$

**引理 5.1.4** 设  $G$  是代数闭域上的一个代数群,  $V$  是  $G$  的一个有限维忠实的半单有理表示, 则  $G$  的么幂根 (unipotent radical) 为  $\{e\}$ , 即  $G$  是简约群 (reductive group).

**证明:** 做半单分解  $V = \bigoplus_{i=1}^k V_i$ , 其中各  $V_i$  为  $G$  的不可约表示, 则  $G$  成为  $\prod_i \text{GL}(V_i)$  的闭子群. 记  $U_i$  为  $G$  的么幂根  $\text{Rad}_u(G)$  在各  $\text{GL}(V_i)$  中的像, 根据一个熟知的事实 (可参见 [40, Proposition 2.4.12] 或 [19, §17.5]),

$$V_i^{U_i} := \{v \in V_i \mid u \cdot v = v, \forall u \in U_i\} \neq 0.$$

由于  $\text{Rad}_u(G)$  是  $G$  的正规子群, 易知各  $V_i^{U_i}$  是  $G$  的不变子空间, 因此  $V_i^{U_i} = V_i$ .  $\text{Rad}_u(G)$  平凡地作用在  $V$  上, 因此  $\text{Rad}_u(G) = 0$ .  $\square$

现在可以来证明 Chevalley 的定理.

**定理 5.1.1 的证明:** 由 5.1.2, 可以假设基域  $K$  为代数闭的. 记  $\rho_i : G \rightarrow \text{GL}(V_i)$  ( $i = 1, 2$ ) 为两个表示对应的同态, 记  $G_1$  为  $G$  在同态

$$\rho_1 \times \rho_2 : G \rightarrow \text{GL}(V_1) \times \text{GL}(V_2)$$

下的像.  $G_1$  通过张量积同态  $\text{GL}(V_1) \times \text{GL}(V_2) \rightarrow \text{GL}(V_1 \otimes V_2)$  自然地作用在  $V_1 \otimes V_2$  上, 且  $V_1 \otimes V_2$  作为  $G$  表示的半单性等价于作为  $G_1$  表示的半单性. 注意张量积同态为代数群的同态.

记  $G_2$  为  $G_1$  在代数群  $\text{GL}(V_1) \times \text{GL}(V_2)$  中的 Zariski 闭包, 特别地  $G_2$  为  $\text{GL}(V_1) \times \text{GL}(V_2)$  的闭子群,  $V_1 \otimes V_2$  成为  $G_2$  的有理表示. 对任意的子空间  $V \subseteq V_2 \otimes V_2$ , 集合

$$X := \{x \in \text{GL}(V_1 \otimes V_2) \mid x \cdot V = V\}$$

是  $GL(V_1 \otimes V_2)$  中的 Zariski 闭集。若  $V$  是  $G_1$  的不变子空间, 即  $G_1$  的像包含于  $X$ , 则闭包  $G_2$  的像也包含于  $X$ 。因此  $V_1 \otimes V_2$  作为  $G_1$  表示的半单性等价于作为  $G_2$  表示的半单性。

现在  $G_2$  是一个代数群,  $V_1 \oplus V_2$  是  $G_2$  的一个忠实半单表示。由 5.1.4,  $G_2$  的么幂根是平凡的,  $G_2$  是简约群。记  $G_3$  为  $G_2$  的单位连通分支, 则  $G_3$  为连通简约群。由于  $\text{Char}(K) = 0$ , 熟知  $V_1 \otimes V_2$  作为  $G_3$  的有理表示是半单的 (可参见 [22, II. 5.6])。由 5.1.3,  $V_1 \otimes V_2$  是  $G_2$  的半单表示。□

**推论 5.1.5** 设  $(W, S)$  的几何表示  $V_{\text{geom}}$  (或  $V_{\text{geom}}^{\mathbb{R}}$ ) 不可约, 则张量表示  $V_{\text{geom}}^{\otimes n}$  (或  $V_{\text{geom}}^{\mathbb{R} \otimes n}$ ) 是半单表示。

### 5.2 秩 3 Coxeter 群和 $SO_3(\mathbb{C})$

**5.2.1** 定理 5.1.1 虽然适用范围很广泛, 是对一般的抽象群来陈述的, 但在实际应用中将会有一些困难, 我们很难确定一般线性群中一个子群的 Zariski 闭包。幸运的是, 对于大部分秩 3 的 Coxeter 群, 我们可以用 Chevalley 的方法来分解它的几何表示的张量积  $V_{\text{geom}}^{\otimes n}$ , 见 5.4 和 5.6 节。

一个 (不可约) 的秩 3 Coxeter 图为以下二者之一,

$$\begin{array}{c}
 \circ \xrightarrow{m_{12}} \circ \xrightarrow{m_{23}} \circ \\
 s_1 \qquad \qquad s_2 \qquad \qquad s_3
 \end{array} \quad \dots (5.1)$$

$$\begin{array}{c}
 \circ \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \circ \quad \quad \circ \\
 \nwarrow \quad \nearrow \\
 \circ
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 s_3 \\
 m_{13} \quad m_{23} \\
 s_1 \quad \quad s_2 \\
 m_{12}
 \end{array} \quad \dots (5.2)$$

(5.1) 的图中, 若  $(m_{12}, m_{23}) = (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 4), (3, 6)$ , 该 Coxeter 群分别为有限型  $A_3, B_3, H_3$  和仿射型  $\tilde{B}_2, \tilde{G}_2$ , (5.2) 的图中, 如果  $(m_{12}, m_{23}, m_{13}) = (3, 3, 3)$ , 为仿射型  $\tilde{A}_2$ 。除了这六个之外, 其他的情形都称为双曲型, 对应的  $V_{\text{geom}}^{\mathbb{R}}$  上的二次型  $B$  的惯性指数 (signature) 都为  $(2, 1)$ , 即表示矩阵合同于对角阵  $\text{diag}(1, 1, -1)$ , 特别地,  $V_{\text{geom}}^{\mathbb{R}}$  (以及  $V_{\text{geom}}$ ) 是个不可约表示。参见 [20, §6.7]。

**5.2.2** 为下文说话方便, 我们简单回顾一下  $A_1$  伴随型代数群  $SO_3(\mathbb{C})$  的结构和表示理论。这些内容可参见 [7, 18, 19, 22, 40, 42] 等标准教材。

回顾三阶正交李代数和正交群的一种矩阵形式为

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{o}_3(\mathbb{C}) &= \{A \in M_3(\mathbb{C}) \mid A^T J + J A = 0\} \\
 &= \left\{ \left( \begin{array}{ccc} 0 & b & -a \\ a & c & 0 \\ -b & 0 & -c \end{array} \right) \middle| a, b, c \in \mathbb{C} \right\}, \\
 O_3(\mathbb{C}) &= \{x \in GL_3(\mathbb{C}) \mid x^T J x = J\},
 \end{aligned}$$

其中

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

依据矩阵行列式为 +1 或 -1,  $O_3(\mathbb{C})$  有两个连通分支, 其单位连通分支记为  $SO_3(\mathbb{C})$ 。选取  $\mathfrak{o}_3(\mathbb{C})$  的一组 Chevalley 基如下,

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

则有  $[H, E] = 2E$ ,  $[H, F] = -2F$ ,  $[E, F] = H$ ,  $\mathfrak{o}_3(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 。

用 [42] 中的方法得到  $SO_3(\mathbb{C})$  的一个极大环面  $\mathfrak{h} = \{h(t) \mid t \in \mathbb{C}^\times\}$  和相应的根子群  $\mathfrak{x} = \{x(t) \mid t \in \mathbb{C}\}$ ,  $\mathfrak{y} = \{y(t) \mid t \in \mathbb{C}\}$  如下,

$$x(t) = \exp tE = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2t \\ 2t & 1 & -2t^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y(t) = \exp tF = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -t & -\frac{t^2}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{C};$$

$$h(t) = x(t)y(-t^{-1})x(t)x(-1)y(1)x(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-2} \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{C}^\times.$$

$SO_3(\mathbb{C})$  的 Weyl 群只有两个元素, 其中非平凡的元素可选取代表元为

$$\omega = x(1)y(-1)x(1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

**5.2.3** 对任意的  $t \in \mathbb{C}^\times$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$ , 有如下关系,

- (1)  $\omega \cdot x(a) \cdot \omega = y(-a)$ 。
- (2)  $\omega \cdot y(a) \cdot \omega = x(-a)$ 。
- (3)  $\omega \cdot h(t) \cdot \omega = h(t^{-1})$ 。
- (4)  $h(t) \cdot x(a) \cdot h(t^{-1}) = x(t^2a)$ 。
- (5)  $h(t) \cdot y(a) \cdot h(t^{-1}) = y(t^{-2}a)$ 。
- (6) 若  $a \neq 0$ ,  $y(a) = x(a^{-1}) \cdot \omega \cdot h(a) \cdot x(a^{-1})$ 。
- (7)  $x(a) \cdot \omega \cdot h(t) \cdot x(b) = \omega \cdot h(t) \cdot y(-at^2) \cdot x(b)$ 。

**5.2.4** 由 Bruhat 分解,  $SO_3(\mathbb{C}) = \mathfrak{h}\mathfrak{x} \sqcup \mathfrak{x}\omega\mathfrak{h}\mathfrak{x} = \mathfrak{h}\mathfrak{x} \sqcup \omega\mathfrak{h}\mathfrak{y}\mathfrak{x}$ , 且任一元素只有唯一一种方式写成如此形式的乘积。 $SO_3(\mathbb{C})$  由两个根子群  $\mathfrak{x}$  和  $\mathfrak{y}$  生成。

**5.2.5**  $SO_3(\mathbb{C})$  为  $A_1$  伴随型, 同构于  $PGL_2(\mathbb{C})$ 。我们可选取并固定由下式定义的同构 (用方括号表示矩阵在非零数乘下的等价类),

$$x(t) \mapsto \left[ \begin{array}{cc} 1 & t \\ 0 & 1 \end{array} \right], \quad y(t) \mapsto \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ t & 1 \end{array} \right], \quad t \in \mathbb{C}.$$

在这样的同构下,  $h(t)$  和  $\omega$  的像分别为

$$h(t) \mapsto \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{C}^\times, \quad \omega \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**5.2.6**  $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$  的不可约有理表示由它的支配权集  $X^+(\mathfrak{h}) = \{\lambda_0, \lambda_2, \lambda_4, \dots\}$  参数化, 其中

$$\lambda_{2n} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad h(t) \mapsto t^{2n}.$$

记  $\lambda_{2n}$  对应的不可约表示为  $V(2n)$ , 则  $\dim V(2n) = 2n + 1$ .

我们可以利用 5.2.5 的同构具体构造出  $V(2n)$ 。令  $V(2n)$  为双变元复多项式环  $\mathbb{C}[X, Y]$  中次数为  $2n$  的齐次多项式全体, 即

$$V(2n) = \langle X^{2n}, X^{2n-1}Y, X^{2n-2}Y^2, \dots, Y^{2n} \rangle_{\mathbb{C}}.$$

$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$  通过如下方式作用在  $V(2n)$  上。对任意的  $g \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ , 取  $g$  在  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  中的代表元矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,

$$(gX, gY) := (X, Y) \cdot A = (aX + cY, bX + dY).$$

通过 5.2.5 的同构,  $V(2n)$  成为  $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$  的表示, 最高权为  $\lambda_{2n}$ 。

这些不可约表示的张量积的半单分解是熟知的, 被称为 Clebsch-Gordan 法则: 设  $m \geq n \geq 0$ ,

$$V(2m) \otimes V(2n) \simeq V(2m + 2n) \oplus V(2m + 2n - 2) \oplus \dots \oplus V(2m - 2n).$$

**5.2.7** 设  $\rho : \mathrm{SO}_3(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  是  $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$  的一个表示, 我们有两种自然的方式将其扩张为  $\mathrm{O}_3(\mathbb{C})$  的表示, 分别记为  $\rho^+$  和  $\rho^-$ , 定义如下。设  $g \in \mathrm{O}_3(\mathbb{C})$ , 则  $g \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$  或  $-g \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$ 。若  $g \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$ ,  $\rho^+(g) = \rho^-(g) := \rho(g)$ 。若  $-g \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$ ,  $\rho^+(g) := \rho(-g)$ ,  $\rho^-(g) := -\rho(-g)$ 。事实上,  $\rho^- = \rho^+ \otimes \det$ , 其中  $\det$  为一维行列式表示。

特别地, 将这样的构造应用在  $V(2n)$  上, 得到的  $\mathrm{O}_3(\mathbb{C})$  的两个表示分别记为  $V^+(2n)$  和  $V^-(2n)$ , 显然它们都是不可约的。不难证明,  $\mathrm{O}_3(\mathbb{C})$  的不可约有理表示只有这些。  $V^+(0)$  为平凡表示, 而  $V^-(0) \simeq \det$ 。

由 Clebsch-Gordan 法则不难知道, 对  $m \geq n \geq 0$ ,

$$V^+(2m) \otimes V^+(2n) \simeq V^+(2m + 2n) \oplus V^+(2m + 2n - 2) \oplus \dots \oplus V^+(2m - 2n).$$

同时由于  $V^-(2n) = V^+(2n) \otimes \det$ , 因此

$$\begin{aligned} V^+(2m) \otimes V^-(2n) &\simeq V^-(2m) \otimes V^+(2n) \\ &\simeq V^-(2m + 2n) \oplus V^-(2m + 2n - 2) \oplus \dots \oplus V^-(2m - 2n), \\ V^-(2m) \otimes V^-(2n) &\simeq V^+(2m + 2n) \oplus V^+(2m + 2n - 2) \oplus \dots \oplus V^+(2m - 2n). \end{aligned}$$

于是我们得到了  $\mathrm{O}_3(\mathbb{C})$  表示张量积的 Clebsch-Gordan 法则。

### 5.3 (半) 双线性型与半单性

在对几何表示张量积的讨论中,  $V_{\text{geom}}$  上的双线性型  $B$  (或 Hermitian 型  $H$ , 见 3.1.3) 将起到重要的作用。事实上, 在某些情形下它们还可以替代定理 5.1.1, 帮助我们得到  $V_{\text{geom}}^{\otimes n}$  的半单性。一般地, 假设在复线性空间  $V$  和  $V'$  上分别有双线性型 (或 Hermitian 型)  $B$  和  $B'$ , 在选定的基下表示矩阵分别为  $B$  和  $B'$ , 那么在  $V \otimes V'$  上有一个自然的双线性型 (或 Hermitian 型)  $B \otimes B'$  由下式线性扩张 (或第一变量线性、第二变量共轭线性扩张) 而来,

$$B \otimes B'(v_1 \otimes v'_1, v_2 \otimes v'_2) := B(v_1, v_2) \cdot B'(v'_1, v'_2), \quad \forall v_1, v_2 \in V, v'_1, v'_2 \in V'.$$

以下事实的证明是简单的。

**引理 5.3.1** (1) 在选定的基下,  $B \otimes B'$  的表示矩阵为  $B \otimes B'$ 。

(2) 当  $B$  和  $B'$  都非退化时,  $B \otimes B'$  也是非退化的。

(3) 如果更进一步,  $V$  和  $V'$  是群  $W$  的表示, 且  $B$  和  $B'$  在群作用下不变, 则  $B \otimes B'$  也在群作用下不变。

特别地, 在  $V_{\text{geom}}^{\otimes n}$  上有如上定义的  $W$ -不变的双线性型  $B^{\otimes n}$  和  $W$ -不变的 Hermitian 型  $H^{\otimes n}$ 。

**引理 5.3.2** 设  $(W, S)$  的 Coxeter 图如 (5.1), 且为双曲型。若存在  $v \in V_{\text{geom}}^{\otimes n} \setminus \{0\}$  满足  $H^{\otimes n}(v, v) = 0$ , 那么存在  $w \in W$ , 使得  $H^{\otimes n}(w \cdot v, v) \neq 0$ 。

证明:  $V_{\text{geom}}$  由  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  张成, 在这组基下,  $H$  的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 \\ a_{12} & 1 & a_{23} \\ 0 & a_{23} & 1 \end{pmatrix}.$$

其中  $a_{ij} = -\cos \frac{\pi}{m_{ij}}$ 。该 Coxeter 群为双曲型当且仅当  $a_{12}^2 + a_{23}^2 > 1$ 。考虑  $V_{\text{geom}}$  的一组新的基,

$$(v_1, v_2, v_3) := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{-a_{12}}{\sqrt{a_{12}^2 + a_{23}^2 - 1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a_{12}^2 + a_{23}^2 - 1}} & 0 \\ 0 & \frac{-a_{23}}{\sqrt{a_{12}^2 + a_{23}^2 - 1}} & 1 \end{pmatrix},$$

在  $\{v_1, v_2, v_3\}$  这组基下  $H, s_1, s_3$  的表示矩阵分别为

$$H: \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad s_1: \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad s_3: \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

$\{v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n} \in V_{\text{geom}}^{\otimes n} \mid i_1, \dots, i_n = 1, 2, 3\}$  组成  $V_{\text{geom}}^{\otimes n}$  的一组基。设

$$v = \sum_{(i_1, \dots, i_n)} c_{i_1 \dots i_n} v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n}, \quad c_{i_1 \dots i_n} \in \mathbb{C},$$

记  $\kappa_2(i_1, \dots, i_n)$  为数列  $(i_1, \dots, i_n)$  中“2”的个数，则

$$H^{\otimes n}(v, v) = \sum_{(i_1, \dots, i_n)} (-1)^{\kappa_2(i_1, \dots, i_n)} |c_{i_1 \dots i_n}|^2.$$

对  $?_1, ?_2, ?_3 \in \{+, -\}$ ，记  $x_{?_1 ?_2 ?_3} = \sum |c_{i_1 \dots i_n}|^2$ ，其中的求和遍历所有满足如下条件的  $(i_1, \dots, i_n)$ ，

若  $?_i = +$ ，数列中含有偶数个  $i$ ，  
若  $?_i = -$ ，数列中含有奇数个  $i$ 。

那么当  $n$  为偶数时，只有  $x_{+++}, x_{+--}, x_{-+-}, x_{--+}$  有可能非零，且

$$\begin{aligned} H^{\otimes n}(v, v) &= x_{+++} - x_{+--} + x_{-+-} - x_{--+}, \\ H^{\otimes n}(s_1 \cdot v, v) &= x_{+++} - x_{+--} - x_{-+-} + x_{--+}, \\ H^{\otimes n}(s_3 \cdot v, v) &= x_{+++} + x_{+--} - x_{-+-} - x_{--+}, \\ H^{\otimes n}(s_1 s_3 \cdot v, v) &= x_{+++} + x_{+--} + x_{-+-} + x_{--+}. \end{aligned}$$

若上面四式都等于零，则  $x_{+++} = x_{+--} = x_{-+-} = x_{--+} = 0$ ，从而  $v = 0$ 。当  $n$  为奇数时，只有  $x_{---}, x_{-++}, x_{+-+}, x_{+--}$  有可能非零，证明类似。□

**推论 5.3.3**  $(W, S)$  如 5.3.2，设  $U \subseteq V_{\text{geom}}^{\otimes n}$  为任意的子表示，则存在子表示  $U^\perp$  使得  $V_{\text{geom}}^{\otimes n} = U \oplus U^\perp$ 。换言之， $V_{\text{geom}}^{\otimes n}$  是半单的。

证明： 令

$$U^\perp := \{v \in V_{\text{geom}}^{\otimes n} \mid H^{\otimes n}(v, u) = 0, \forall u \in U\},$$

则  $U^\perp$  为  $V_{\text{geom}}^{\otimes n}$  的子表示。由于  $H^{\otimes n}$  非退化，有  $\dim U + \dim U^\perp = \dim V_{\text{geom}}^{\otimes n}$ 。假设  $0 \neq v \in U \cap U^\perp$ ，则  $H^{\otimes n}(v, v) = 0$ 。由 5.3.2，存在  $w \in W$  使得  $H^{\otimes n}(w \cdot v, v) \neq 0$ 。但  $w \cdot v$  也属于  $U \cap U^\perp$ ，矛盾。因此， $U \cap U^\perp = 0$ ，从而  $V_{\text{geom}}^{\otimes n} = U \oplus U^\perp$ 。□

**注 5.3.4** 记  $V_{\text{geom}}^{\mathbb{R}}$  为  $\{\alpha_s \mid s \in S\}$  张成的实表示。在 5.3.2 和 5.3.3 的证明中把 Hermitian 型  $H$  换成双线性型  $B$ ，便得到  $V_{\text{geom}}^{\mathbb{R} \otimes n}$  的半单性。

**注 5.3.5** 从 5.3.3 的证明中可以看到， $V_{\text{geom}}^{\otimes n}$  可分解为在 Hermitian 型  $H^{\otimes n}$  下相互正交的若干不可约子表示的直和。很自然地猜测，对任意的 Coxeter 群，若  $V_{\text{geom}}$  不可约， $V_{\text{geom}}^{\otimes n}$  皆可分解为在  $H^{\otimes n}$  下相互正交的若干不可约分量的直和。有些简单的例子是容易验证的。比如  $V_{\text{geom}} \otimes V_{\text{geom}}$  分解为  $\wedge^2 V_{\text{geom}} \oplus \mathbf{1} \oplus V'$ ，其中外积  $\wedge^2 V_{\text{geom}}$  和平凡表示  $\mathbf{1}$  都是单的， $\mathbf{1} \oplus V'$  为对称积  $\text{Sym}^2 V_{\text{geom}}$ 。容易验证在双线性型  $B^{\otimes 2}$  下， $\wedge^2 V_{\text{geom}}$  和  $\mathbf{1}$  正交。在所有秩 3 双曲的情形，也可验证这三个分量相互正交。这些例子为猜测提供了证据。

#### 5.4 张量积的半单分解

利用 Chevalley 的定理 5.1.1 的思路，我们可以分解秩 3 双曲型的 Coxeter 群的几何表示张量积  $V_{\text{geom}}^{\otimes n}$ 。采用 5.2 节的记号。

5.4.1 先看一个简单的例子。假设  $(W, S)$  的 Coxeter 图如下，

$$\begin{array}{c} \circ \quad \quad \infty \quad \quad \infty \quad \quad \circ \quad \quad \quad \circ \\ | \quad \quad \quad | \quad \quad \quad | \\ s_1 \quad \quad \quad s_2 \quad \quad \quad s_3 \end{array}$$

在基  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  下，双线性型  $B$  和  $s_1, s_2, s_3$  的表示矩阵分别为

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_1 : \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$s_2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

取一组新的基  $\{v_1, v_2, v_3\}$ ，并通过这组基把  $GL(V_{\text{geom}})$  等同于  $GL_3(\mathbb{C})$ ，

$$(v_1, v_2, v_3) := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot Q, \quad \text{其中 } Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

在这组基下  $B$  和  $s_1, s_2, s_3$  的表示矩阵分别为 (并以此将  $W$  视为  $GL_3(\mathbb{C})$  的子群，因为  $V_{\text{geom}}$  是个忠实表示)

$$Q^T B Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = J, \quad s_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$s_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

计算  $s_1 s_2$  和  $s_3 s_1 s_2 s_3$  的表示矩阵分别为

$$s_1 s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_3 s_1 s_2 s_3 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

记  $\overline{W}$  为  $W$  在  $GL_3(\mathbb{C})$  中的像的 Zariski 闭包，它是  $GL_3(\mathbb{C})$  的闭子群。在 5.2 节的记号下， $s_1 s_2 = x(-1)$ ， $s_3 s_1 s_2 s_3 = y(-4)$ ，这表明对任意的  $k \in \mathbb{N}$ ， $x(-k)$  和  $y(-4k)$  都落在  $\overline{W}$  中，因此  $\overline{W}$  包含了  $SO_3(\mathbb{C})$  的两个根子群。 $SO_3(\mathbb{C})$  由它的两个根子群生成，所以  $SO_3(\mathbb{C}) \subseteq \overline{W}$ 。注意到  $W$  在  $V_{\text{geom}}$  上的作用保持双线性型  $B$ ，因此  $\overline{W} \subseteq O_3(\mathbb{C})$ 。 $S$  中的元素在  $V_{\text{geom}}$  上的作用是一个“反射”，行列式为  $-1$ ，因此必然有  $\overline{W} = O_3(\mathbb{C})$ 。

**注 5.4.2** 对其他秩 3 双曲型 Coxeter 群，也可用类似方法证明它在  $GL(V_{\text{geom}})$  中的像的 Zariski 闭包同构于  $O_3(\mathbb{C})$ ，见 5.6 节。本节剩余的讨论对这些群都适用，从而得到  $V_{\text{geom}}^{\otimes n}$  的半单分解。

**5.4.3** 通过 5.4.1 选定的基  $\{v_1, v_2, v_3\}$ ,  $O_3(\mathbb{C})$  作用在  $V_{\text{geom}}$  上, 限制在  $W$  上即为几何表示。从 5.1.1 的证明中已经知道,  $V_{\text{geom}}^{\otimes n}$  作为  $W$  表示的半单分解与作为  $O_3(\mathbb{C})$  表示的半单分解是一样的, 而且  $O_3(\mathbb{C})$  的各不可约表示  $V^{\pm}(2n)$  (见 5.2.7) 限制在  $W$  上还是不可约的。把它们在  $W$  上的限制也记为  $V^{\pm}(2n)$ 。

$V_{\text{geom}}$  作为  $O_3(\mathbb{C})$  的不可约表示同构于  $V^-(2)$ 。由 5.2.7 中  $O_3(\mathbb{C})$  表示张量基的 Clebsch-Gordan 法则, 归纳地我们可以得到  $V_{\text{geom}}^{\otimes n}$  的半单分解。

**定理 5.4.4** 设  $W$  为秩 3 双曲型的 Coxeter 群,  $n \geq 1$ , 则

$$V_{\text{geom}}^{\otimes n} \simeq \bigoplus_{i=0}^n a_{i,n} V^?(2n-2i),$$

其中  $? = +$  若  $n$  为偶数,  $? = -$  若  $n$  为奇数。除  $a_{1,1} = 0$  外,  $a_{i,n} \in \mathbb{N}_{>0}$ , ( $0 \leq i \leq n$ ), 且满足如下递归关系,

$$\begin{aligned} n = 1, \quad a_{0,1} = 1, \quad a_{1,1} = 0, \\ n \geq 2, \quad a_{0,n} = 1, \\ a_{1,n} = a_{0,n-1} + a_{1,n-1}, \\ a_{i,n} = a_{i-2,n-1} + a_{i-1,n-1} + a_{i,n-1}, \quad \text{若 } 2 \leq i \leq n-1, \\ a_{n,n} = a_{n-2,n-1}. \end{aligned}$$

证明: 对  $n$  归纳。 □

当  $1 \leq i \leq n-1$  时,  $a_{i,n}$  是一个  $i-1$  次的幂数列的求和, 其结果是  $n$  的一个  $i$  次多项式。特别地,  $a_{1,n} = n-1$ ,  $a_{2,n} = \frac{n(n-1)}{2}$ 。理论上任给一个  $i$  可以在有限步内求出  $a_{i,n}$  的表达式。

**注 5.4.5** 从定理中可以看出, 通过几何表示的张量积我们能构造出  $W$  (秩 3 双曲型) 的无穷多个不可约表示。这与有限型的  $W$  不同, 因为有限群的不可约表示个数有限。仿射 Weyl 群的几何表示不是单的, 它的 Jordan-Hölder 因子有两个, 一个是平凡表示, 另一个是相应的 Weyl 群的几何表示。因此仿射 Weyl 群几何表示张量积也只能产生有限多个不可约因子。

**注 5.4.6** 注意到  $O_3(\mathbb{C})$  的行列式表示  $\det$  限制在  $W$  上即为符号表示  $\varepsilon$  (把各  $s \in S$  映到  $-1$ )。当  $S$  中的元素不全在  $W$  的同一个共轭类里时,  $W$  还有其他的一维表示, 可以称作“部分符号表示”。比如, 对 5.4.1 中的  $W$ , 任取  $\varepsilon_i = \pm 1$ , 由  $s_i \mapsto \varepsilon_i$  共可构造出八个一维表示, 其中六个为所谓的部分符号表示。在  $V_{\text{geom}}^{\otimes n}$  中出现的不可约表示与这些部分符号表示的张量积 (也是  $W$  的不可约表示) 并不出现在  $V_{\text{geom}}^{\otimes n}$  中。因此, 几何表示张量积一般不能得到  $W$  的所有不可约表示, 这与有限群不同 (任给有限群的一个忠实表示, 其张量积可以产生出所有的不可约表示, 见 [16, Problem 2.37\*])。

**注 5.4.7** 定理中出现的不可约表示的维数可以任意地大, 无上界。而我们已在 4.8 节中看到有很多 Coxeter 群具有无穷维不可约表示 (而有限型和仿射型 Coxeter 群的不可约表示都是有限维的)。



### 5.5 一个简单的例子

在这一节中，我们考虑 5.4.1 中的 Coxeter 群，即  $W = \langle s_1, s_2, s_3 \mid s_1 s_3 = s_3 s_1 \rangle$ 。我们将计算它的胞腔和基环，以及几何表示张量积分解中的各直和分量，和它们所对应的胞腔。

对一般的 Coxeter 群  $(W, S)$ ，在 [3] (及其勘误 [4, Remark 2.4]) 中已经知道如果对任意的  $s, t \in S$ ，都有  $m_{st} = 2$  或  $\infty$ ，则  $W$  有界 (即  $\mathbf{a}$ -函数有界，且上界为有限抛物子群最长元长度的最大值，见 2.1.19)。特别地，对 5.4.1 中的  $W$ ， $\mathbf{a}$ -函数值不超过 2。我们可以从另一角度看出这个事实。

**定理 5.5.1** 设  $(W_1, S_1)$ ， $(W_2, S_2)$  为两个有界的 Coxeter 群。定义另一个 Coxeter 群  $(W, S_1 \sqcup S_2)$ ，包含  $W_1, W_2$  为其抛物子群，且若  $s \in S_1$ ， $t \in S_2$ ，则  $m_{st}$  定义为  $\infty$ 。那么  $(W, S_1 \sqcup S_2)$  有界。

$W$  为  $W_1$  和  $W_2$  的自由积 (free product)。画出  $W_1$  和  $W_2$  的 Coxeter 图，取遍  $(s, t) \in S_1 \times S_2$ ，用标注  $\infty$  的边连接  $s$  和  $t$  对应的顶点，便得到  $W$  的 Coxeter 图。取  $S_1 = \{s_2\}$ ， $S_2 = \{s_1, s_3\}$ ，便得到 5.4.1 中的  $W$  的有界性。

证明：由 2.1.20 (5)，只需考虑  $-\mathbf{v}(f_{x,y,z})$  的上界。对任意的  $x \in W \setminus \{e\}$ ， $x$  有唯一的一种方式写成  $W_1 \setminus \{e\}$  和  $W_2 \setminus \{e\}$  中元素的交错乘积  $x = x_1 \cdots x_n$ ，各  $x_i$  属于  $W_1 \setminus \{e\}$  或  $W_2 \setminus \{e\}$ ，相邻两项分属  $W_1$  或  $W_2$ ，且  $\ell(x) = \ell(x_1) + \cdots + \ell(x_n)$ 。对  $y \in W \setminus \{e\}$ ，类似地  $y = y_m \cdots y_1$ 。若  $x_n$  和  $y_m$  不属于同一个  $W_i$  ( $i = 1, 2$ )，则  $\tilde{T}_x \tilde{T}_y = \tilde{T}_{xy}$ 。若  $x_n$  和  $y_m$  都属于，比如说， $W_1$ ，则

$$\begin{aligned} \tilde{T}_x \tilde{T}_y &= \tilde{T}_{x_1 \cdots x_{n-1}} \tilde{T}_{x_n} \tilde{T}_{y_m} \tilde{T}_{y_{m-1} \cdots y_1} \\ &= \tilde{T}_{x_1 \cdots x_{n-1}} \left( \sum_{z \in W_1} f_{x_n, y_m, z} \tilde{T}_z \right) \tilde{T}_{y_{m-1} \cdots y_1} \\ &= f_{x_n, y_m, e} \tilde{T}_{x_1 \cdots x_{n-1}} \tilde{T}_{y_{m-1} \cdots y_1} + \sum_{z \in W_1 \setminus \{e\}} f_{x_n, y_m, z} \tilde{T}_{x_1 \cdots x_{n-1} z y_{m-1} \cdots y_1}. \end{aligned}$$

根据 2.1.14， $f_{x_n, y_m, e} = 1$  或  $0$ ，而由假设  $-\mathbf{v}(f_{x_n, y_m, z})$  不超过  $W_1$  的有限抛物子群最长元长度的最大值。归纳地可知，对任意  $z \in W$ ， $-\mathbf{v}(f_{x,y,z})$  不超过  $W_1$  和  $W_2$  的有限抛物子群最长元长度的最大值。注意到  $W$  的有限抛物子群包含于  $W_1$  或  $W_2$  中，知命题成立。□

**5.5.2** 对有界的  $W$ ，[44, §4.4] 给出了  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}_1}$  中的运算规则。首先根据 2.1.17 和 2.3.3，有

- (1) 若  $x, y \in \mathcal{C}_1$  满足  $\mathcal{R}(x) \neq \mathcal{L}(y)$ ，则  $J_x J_y = 0$ 。
- (2) 设  $s \in S$ ， $x \in \mathcal{C}_1$ ， $\mathcal{R}(x) = \{s\}$ ，则  $J_x J_s = J_x$ ， $J_s J_{x^{-1}} = J_{x^{-1}}$ 。

对任意的  $x \in \mathcal{C}_1 \setminus S$ ， $x$  有唯一的既约表达，在该表达中，两个单反射的最长连乘积称为  $x$  的一个二面体区间。例如，设  $x$  的既约表达为  $stsrttrt$ ，其中  $s, r, t \in S$  为互异的单反射，则  $x$  的所有二面体区间为  $x_1 = sts$ ， $x_2 = sr$ ， $x_3 = rtrt$ 。 $x_1$  和  $x_2$  包含不同的单反射，但  $\mathcal{R}(x_1) = \mathcal{L}(x_2) = \{s\}$  为相同的单反射，记

$x_1 * x_2 := x_1 s x_2$ 。在该记号下,  $x = x_1 * x_2 * x_3$ 。一般地, 任意  $\mathcal{C}_1 \setminus S$  中的元素  $w$  都可写为  $w = w_1 * w_2 * \cdots * w_k$ , 其中各  $w_i$  依次为  $w$  的二面体区间。[44] 证明了,

(3) 设  $w = w_1 * w_2 * \cdots * w_k \in \mathcal{C}_1 \setminus S$ , 则  $J_w = J_{w_1} J_{w_2} \cdots J_{w_k}$ 。

因此, 我们有:

(4) 若  $x, y \in \mathcal{C}_1 \setminus S$  满足  $\mathcal{R}(x) = \mathcal{L}(y) = \{s\}$ , 且  $x$  的最后一个二面体区间和  $y$  的第一个二面体区间包含不同的单反射 (即既约表达分别为  $x = \cdots r s$ ,  $y = s t \cdots$ ,  $r \neq t$ ), 则  $J_x J_y = J_{x s y}$ 。

(5) 设  $x = x_1 * \cdots * x_k, y = y_1 * \cdots * y_l \in \mathcal{C}_1 \setminus S$  分别为其二面体区间分解, 且  $x_k$  和  $y_1$  都是  $r, t \in S$  的连乘积,  $\mathcal{R}(x_k) = \mathcal{L}(y_1)$ , 则  $\ell(x_k), \ell(y_1) < m_{rt}$ , 且在  $J_{\mathcal{C}_1}$  中乘积  $J_{x_k} J_{y_1}$  满足 2.5.4 或 2.5.7 的公式 (取决于  $m_{rt}$  是否为  $\infty$ ), 设

$$J_{x_k} J_{y_1} = \sum_i J_{z_i},$$

其中各  $z_i$  为  $r, t$  的连乘积, 且满足  $\mathcal{L}(z_i) = \mathcal{L}(x_k)$ ,  $\mathcal{R}(z_i) = \mathcal{R}(y_1)$ , 因此

$$\begin{aligned} J_x J_y &= \sum_i J_{x_1 \cdots x_{k-1}} J_{z_i} J_{y_2 \cdots y_l} \\ &= \sum_{\substack{i \\ \ell(z_i) \geq 2}} J_{x_1 \cdots x_{k-1} * z_i * y_2 \cdots y_l} + \sum_{\substack{i \\ z_i \in S}} J_{x_1 \cdots x_{k-1} * y_2 \cdots y_l}. \end{aligned}$$

(1) (2) (4) (5) 给出了  $J_{\mathcal{C}_1}$  中的全部乘法关系。

**5.5.3** 回到 5.4.1 中的  $(W, S)$ ,  $W = \langle s_1, s_2, s_3 \mid s_1 s_3 = s_3 s_1 \rangle$ , 为记号简洁, 将乘积  $s_{i_1} \cdots s_{i_k}$  记为  $\underline{i_1 \cdots i_k}$ , 记号  $J_{\underline{i_1 \cdots i_k}}$  等类似。

已经知道  $W$  的  $\mathbf{a}$ -函数的上界为 2,  $\mathbf{a}$ -函数值为 0 的元素只有幺元  $e$ ,  $\mathbf{a}$ -函数值为 1 的元素组成一个双边胞腔  $\mathcal{C}_1$ , 见 2.1.22。若某元素属于  $\mathcal{C}_1$ , 其既约表达中 1 和 3 不相邻, 即形如  $\cdots 2i2j2 \cdots$ , 其中  $i, j$  等单反射为 1 或 3。

2.2.7 告诉我们,  $W$  中  $\mathbf{a}$ -函数值为 2 的元素也组成一个双边胞腔, 记为  $\mathcal{C}_2$ , 它里面的元素的既约表达都形如  $\cdots 13 \cdots$ 。想要计算  $J_{\mathcal{C}_2}$  中的乘法, 可以借助下面的引理, 取自 [43]。

**引理 5.5.4** 设  $W$  的  $\mathbf{a}$ -函数有上界  $N$ 。若  $z \in W$ ,  $\mathbf{a}(z) = N$ , 则对任意的  $x, y \in W$ , 有  $f_{x,y,z} = (-1)^N \gamma_{x,y,z} q^{-\frac{N}{2}} + q^{\frac{1}{2}}$  的更高次项。

证明: 注意到  $\mathcal{H}$  的两组基  $\{\tilde{T}_w\}$  和  $\{C_w\}$  的转换关系满足

$$C_w \in \tilde{T}_w + q^{\frac{1}{2}} \sum_{w' \in W} \mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}] \tilde{T}_{w'}, \quad \tilde{T}_w \in C_w + q^{\frac{1}{2}} \sum_{w' \in W} \mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}] C_{w'},$$

于是有 (回顾 2.1.12 的记号)

$$\begin{aligned} \sum_{z \in W} f_{x,y,z} \tilde{T}_z &= \tilde{T}_x \tilde{T}_y \\ &\in \left( C_x + q^{\frac{1}{2}} \sum_{x' \in W} \mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}] C_{x'} \right) \left( C_y + q^{\frac{1}{2}} \sum_{y' \in W} \mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}] C_{y'} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\subseteq C_x C_y + q^{\frac{1}{2}} \sum_{x', y'} \mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}] C_{x'} C_{y'} \\
 &\subseteq \sum_{z \in W} h_{x, y, z} C_z + q^{\frac{1}{2}} \sum_{x', y', z} h_{x', y', z} \mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}] C_z \\
 &\subseteq \sum_{z \in W} h_{x, y, z} \left( \tilde{T}_z + q^{\frac{1}{2}} \sum_{z' \in W} \mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}] \tilde{T}_{z'} \right) \\
 &\quad + q^{\frac{1}{2}} \sum_{x', y', z} h_{x', y', z} \mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}] \left( \tilde{T}_z + q^{\frac{1}{2}} \sum_{z' \in W} \mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}] \tilde{T}_{z'} \right) \\
 &\subseteq \sum_{z \in W} h_{x, y, z} \tilde{T}_z + q^{\frac{-N+1}{2}} \sum_{z \in W} \mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}] \tilde{T}_z.
 \end{aligned}$$

因此  $f_{x, y, z}$  和  $h_{x, y, z}$  中  $q^{-\frac{N}{2}}$  的系数相同。当  $\mathbf{a}(z) = N$  时, 根据定义, 这个系数为  $(-1)^N \gamma_{x, y, z}$ .  $\square$

**5.5.5** 利用该引理, 对  $x, y \in \mathcal{C}_2$ , 想要计算  $J_x J_y$ , 只需要计算  $\tilde{T}_x \tilde{T}_y$ .  $x$  的既约表达可唯一地写成如下形式,

$$x = \underline{x_k 13} \cdots 13 x_2 13 x_1, \quad k \geq 2,$$

其中  $x_1^{-1}, x_k \in \{e\} \cup \Gamma_{s_2}$ ,  $x_2, \dots, x_{k-1} \in \Gamma_{s_2} \cap \Gamma_{s_2}^{-1}$ ,  $\Gamma_{s_2} = \{w \in \mathcal{C}_1 \mid w s_2 < w\}$ , 下划线  $\underline{x_i}$  为  $x_i$  的(唯一的)既约表达。类似地将  $y$  的既约表达写成

$$y = y_1 13 y_2 13 \cdots 13 y_l, \quad l \geq 2.$$

- (1) 若  $x_1 = e$ ,  $y_1 \neq e$ , 或  $x_1 \neq e$ ,  $y_1 = e$ , 则  $\mathcal{R}(x) \neq \mathcal{L}(y)$ , 根据 2.1.17 和 2.3.3, 知  $J_x J_y = 0$ .
- (2) 若  $x_1 = y_1 = e$ , 记  $\xi = q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}$ , 则

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}_x \tilde{T}_y &= \tilde{T}_{\underline{x_k 13 \cdots 13 x_2}} \left( \xi^2 \tilde{T}_{13} + \xi \tilde{T}_1 + \xi \tilde{T}_3 + 1 \right) \tilde{T}_{\underline{y_2 13 \cdots 13 y_l}} \\
 &= \xi^2 \tilde{T}_{\underline{x_k 13 \cdots 13 x_2 13 y_2 13 \cdots 13 y_l}} + \xi \tilde{T}_{\underline{x_k 13 \cdots 13 x_2 1 y_2 13 \cdots 13 y_l}} \\
 &\quad + \xi \tilde{T}_{\underline{x_k 13 \cdots 13 x_2 3 y_2 13 \cdots 13 y_l}} + \tilde{T}_{\underline{x_k 13 \cdots 13 x_2}} \tilde{T}_{\underline{y_2 13 \cdots 13 y_l}}.
 \end{aligned}$$

注意式中出现的表达都是既约的。由 5.5.4, 得知

$$J_x J_y = \begin{cases} J_{\underline{x_k 13 \cdots 13 x_2 13 y_2 13 \cdots 13 y_l}} + J_{\underline{x_k 13 \cdots 13 x_2}} J_{\underline{y_2 13 \cdots 13 y_l}}, & \text{若 } k, l > 2, \\ J_{\underline{x_k 13 \cdots 13 x_2 13 y_2 13 \cdots 13 y_l}}, & \text{若 } k = 2 \text{ 或 } l = 2. \end{cases}$$

- (3) 若  $x_1 = y_1^{-1}$ , 且  $x_1 \neq e$ , 设  $x_1 = \underline{i_1 i_2 \cdots i_j}$ , 其中  $i_1, i_3, \dots = 2$ ,  $i_2, i_4, \dots = 1$  或 3. 此时有

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}_x \tilde{T}_y &= \tilde{T}_{\underline{\cdots x_2 13}} \tilde{T}_{\underline{i_1 \cdots i_j}} \tilde{T}_{\underline{i_j \cdots i_1}} \tilde{T}_{\underline{13 y_2 \cdots}} \\
 &= \xi \tilde{T}_{\underline{\cdots x_2 13 i_1 \cdots i_{j-1} i_j i_{j-1} \cdots i_1 13 y_2 \cdots}} + \tilde{T}_{\underline{\cdots x_2 13}} \tilde{T}_{\underline{i_1 \cdots i_{j-1}}} \tilde{T}_{\underline{i_{j-1} \cdots i_1}} \tilde{T}_{\underline{13 y_2 \cdots}} \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

$$= \text{系数为 } \xi \text{ 的一些项} + \tilde{T}_{\dots x_2 13} \tilde{T}_{13 y_2 \dots}$$

式中出现的表达都是既约的。根据 5.5.4, 得到  $J_x J_y = J_{\underline{x_k 13 \dots x_2 13}} J_{\underline{13 y_2 \dots 13 y_l}}$ , 化归为 (2) 的情况。

- (4) 若  $x_1 \neq y_1^{-1}$ ,  $x_1, y_1 \neq e$ , 可假设  $\mathcal{R}(x_1) = \mathcal{L}(y_1)$ , 否则根据 2.1.17 和 2.3.3 知  $J_x J_y = 0$ 。因此  $x_1, y_1$  可唯一地写成  $x_1 = uz$ ,  $y_1 = z^{-1}v$ , 其中  $z \in \mathcal{C}_1$ ,  $u, v \in \{e\} \cup \mathcal{C}_1$ , 使得  $\ell(x_1) = \ell(u) + \ell(z)$ ,  $\ell(y_1) = \ell(v) + \ell(z)$ , 且  $\mathcal{R}(u) \neq \mathcal{L}(v)$  ( $u, v$  不同时为  $e$ )。类似 (3) 中的计算, 有

$$\tilde{T}_x \tilde{T}_y = \text{系数为 } \xi \text{ 的一些项} + \tilde{T}_{\dots 13 x_2 13 u} \tilde{T}_{v 13 y_2 13 \dots}$$

因此  $J_x J_y = J_{\dots 13 x_2 13 u} J_{v 13 y_2 13 \dots}$ 。但  $\mathcal{R}(\dots 13 x_2 13 u) \neq \mathcal{L}(v 13 y_2 13 \dots)$ , 根据 2.1.17 和 2.3.3,  $J_x J_y = 0$ 。

上述 (1) (2) (3) (4) 给出了计算  $J_x J_y$  ( $x, y \in \mathcal{C}_2$ ) 的递归步骤。将结果归纳如下。

假设  $x_1 = y_1^{-1}, x_2 = y_2^{-1}, \dots, x_i = y_i^{-1}$ , 但  $x_{i+1} \neq y_{i+1}^{-1}$ 。可假设  $i \geq 1$ , 否则由 (4) 知  $J_x J_y = 0$ 。由上述递归步骤得到

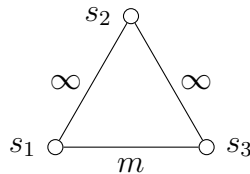
$$J_x J_y = J_{\underline{x_k 13 \dots 13 x_2 13 y_2 13 \dots 13 y_l}} + J_{\underline{x_k 13 \dots 13 x_3 13 y_3 13 \dots 13 y_l}} + \dots + J_{\underline{x_k 13 \dots 13 x_{i+1} 13 y_{i+1} 13 \dots 13 y_l}}$$

(若  $i = \min(k, l)$ , 则最后一项的含义为零。)

**5.5.6** 作为推论, 可利用上述计算结果得到  $\mathcal{C}_2$  的左胞腔分解和特异对合元集。根据 2.3.6 的结论, 5.5.5 中的  $x$  和  $y^{-1}$  落在同一个左胞腔中当且仅当  $x_1 = y_1^{-1}$ , 从而  $\mathcal{C}_2$  中的左胞腔由  $\{e\} \cup \Gamma_{s_2}$  参数化。特别地,  $\mathcal{C}_2$  中有无穷多个左胞腔。左胞腔无穷多的现象最早发现于 [2]。

设  $x_1 \in \{e\} \cup \Gamma_{s_2}^{-1}$ ,  $x$  如 5.5.5, 考虑元素  $\underline{x_1^{-1} 13 x_1}$ , 从上面的运算规则知  $J_x J_{\underline{x_1^{-1} 13 x_1}} = J_x$ 。根据 2.3.6, 知  $\underline{x_1^{-1} 13 x_1}$  是它所在的左胞腔的特异对合元。特别地, 根据定义, 得到  $\deg_q P_{e, \underline{x_1^{-1} 13 x_1}} = \ell(x_1)$ 。

**注 5.5.7** 对  $m \geq 3$ , 下图给出一个 Coxeter 群  $(W', S)$ ,



[43] 告诉我们,  $W'$  有界。与  $W$  类似, 它只有三个双边胞腔,  $\{e\}, \mathcal{C}_1$  和  $\mathcal{C}_m$ , 其中

$$\mathcal{C}_m = \{w \in W \mid \mathbf{a}(w) = m\} = \{w \text{ 的既约表达中有一段 } s_1, s_3 \text{ 的 } m \text{ 项连乘积}\}.$$

5.5.5 的讨论稍加修改, 类似地也可得到该 Coxeter 群的基环结构和左胞腔分解。

**5.5.8** 采用 5.4.1 的符号和设定, 把  $W$  视为  $O_3(\mathbb{C})$  的子群, 此时

$$-s_1, -s_2, -s_3 \in \text{SO}_3(\mathbb{C}), \text{ 且}$$



但是，作者在完成上述断言的证明之后，经他人提醒发现，早在 [5] 中，人们已经有了如下更一般的结果。

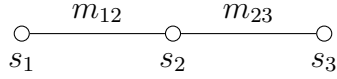
**定理 5.6.2** (见 [5, §2. Théorème]) 设  $(W, S)$  为有限秩不可约的 Coxeter 系统，若几何表示  $V_{\text{geom}}^{\mathbb{R}}$  上的双线性型  $B$  非正定且非退化，则  $W$  在  $GL(V_{\text{geom}}^{\mathbb{R}})$  中的 Zariski 闭包为

$$O(V_{\text{geom}}^{\mathbb{R}}, B) = \{g \in GL(V_{\text{geom}}^{\mathbb{R}}) \mid B(gv, gu) = B(v, u), \forall v, u \in V_{\text{geom}}^{\mathbb{R}}\}.$$

由 5.6.2 可轻易得到 5.6.1，这一节内容便失去了存在的必要。不过由于所用的方法不同，作者觉得把自己的证明记录下来也是有意思的。

本节的剩余内容为 5.6.1 的证明。采用 5.2 节的记号。

**5.6.3** 在 5.6.3 和 5.6.4 中，假设  $(W, S)$  为双曲型，且 Coxeter 图如下，



在基  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  下，双线性型  $B$  和  $s_1, s_2, s_3$  的表示矩阵分别为

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & b \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}, \quad s_1 : \begin{pmatrix} -1 & -2a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$s_2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2a & -1 & -2b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2b & -1 \end{pmatrix}.$$

其中  $a = -\cos \frac{\pi}{m_{12}}$ ,  $b = -\cos \frac{\pi}{m_{23}}$ 。注意  $a, b \in [-1, 0)$ 。该 Coxeter 群为双曲型当且仅当  $a^2 + b^2 > 1$ 。令

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{2\sqrt{a^2+b^2-1}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2-1}} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2-1}} & -\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2-1}} \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{b}{2\sqrt{a^2+b^2-1}} & 1 + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2-1}} \end{pmatrix}$$

取一组新的基  $\{v_1, v_2, v_3\}$ ，并通过这组基把  $GL(V_{\text{geom}})$  等同于  $GL_3(\mathbb{C})$ ，

$$(v_1, v_2, v_3) := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot Q.$$

在这组基下  $B$  和  $s_1, s_2, s_3$  的表示矩阵分别为

$$Q^T B Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = J, \quad s_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$s_2 = \begin{pmatrix} 1 - 2a^2 & a(\sqrt{a^2 + b^2 - 1} - b) & -2a(b + \sqrt{a^2 + b^2 - 1}) \\ -2a(b + \sqrt{a^2 + b^2 - 1}) & a^2 & -2(b + \sqrt{a^2 + b^2 - 1})^2 \\ a(\sqrt{a^2 + b^2 - 1} - b) & -\frac{1}{2}(b - \sqrt{a^2 + b^2 - 1})^2 & a^2 \end{pmatrix}$$

以此将  $W$  视为  $GL_3(\mathbb{C})$  的子群。

已经知道  $W$  保持双线性型  $B$ , 因此  $W$  包含于  $O_3(\mathbb{C})$  中。记  $\overline{W}$  为  $W$  在  $O_3(\mathbb{C})$  中的 Zariski 闭包。  $V_{\text{geom}}$  是  $\overline{W}$  的忠实不可约表示, 由 5.1.4,  $\overline{W}$  是个简约群, 特别地, 其单位连通分支  $\overline{W}^0$  是连通简约群, 包含于  $SO_3(\mathbb{C})$  中。根据简约群的结构理论,  $SO_3(\mathbb{C})$  中的连通简约群只有以下三种情况,

- (1)  $SO_3(\mathbb{C})$ ,
- (2)  $\{e\}$ ,
- (3) 某个极大环面, 共轭于  $\mathfrak{h}$ 。

情况 (2) 不可能发生, 否则  $\overline{W}$  是个有限群, 而我们知道双曲型的  $W$  是个无限群。下面我们用一些思路直接但过程繁琐的计算来排除情况 (3), 从而得到  $\overline{W}^0 = SO_3(\mathbb{C})$ , 再考虑到各  $s_i$  行列式为  $-1$ , 因此有  $\overline{W} = O_3(\mathbb{C})$ 。

**5.6.4** 设定如 5.6.3。假设  $\overline{W}^0 = g^{-1}\mathfrak{h}g$  为  $SO_3(\mathbb{C})$  的某个极大环面, 其中  $g \in SO_3(\mathbb{C})$ 。  $\overline{W}$  包含于该极大环面的正规化子中, 即对任意的  $z \in \overline{W}$ ,

$$zg^{-1}\mathfrak{h}gz^{-1} = g^{-1}\mathfrak{h}g,$$

若  $z \in \overline{W} \cap SO_3(\mathbb{C})$ , 则有

$$gzg^{-1} \in N_{SO_3(\mathbb{C})}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h} \sqcup \omega\mathfrak{h}.$$

注意  $\mathfrak{h}$  中的元素是对角阵, 而  $\omega\mathfrak{h}$  中的矩阵也有很多零元素, 形如

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * \\ 0 & * & 0 \end{pmatrix}.$$

由 5.2.4 的 Bruhat 分解,  $g \in \mathfrak{h}\mathfrak{x}$  或  $\omega\mathfrak{h}\mathfrak{y}\mathfrak{x}$ , 而  $\omega$  正规化  $\mathfrak{h}$ , 因此可以取  $g \in \mathfrak{x}$  或  $\mathfrak{y}\mathfrak{x}$ 。

先假设  $g = x(r) \in \mathfrak{x}$ , 其中  $r \in \mathbb{C}$ 。如上述, 取  $z = s_1s_3 = \omega$ , 计算

$$gzg^{-1} = x(r)\omega x(-r) = \begin{pmatrix} -1 - 2r^2 & r & -2(r + r^3) \\ -2(r + r^3) & r^2 & -2(1 + r^2)^2 \\ r & -\frac{1}{2} & r^2 \end{pmatrix}.$$

想让这个矩阵落在  $\mathfrak{h} \sqcup \omega\mathfrak{h}$  中, 只能  $r = 0$ , 即  $g = e$ 。但是注意  $s_1s_2$  的 (3,1)-元素  $a(\sqrt{a^2 + b^2 - 1} - b)$  是个非零负数, 因此  $s_1s_2 \notin \mathfrak{h} \sqcup \omega\mathfrak{h}$ , 矛盾。这里 (3,1)-元素指矩阵第 3 行第 1 列的元素, 下面类似。

考虑另一情形, 设  $g = y(s)x(r) \in \mathfrak{y}\mathfrak{x}$ , 其中  $s, r \in \mathbb{C}$ 。同样地, 先取  $z = s_1s_3 = \omega$ , 计算得到  $gzg^{-1} = y(s)x(r)\omega x(-r)y(-s)$  的 (2,1)-元素为

$$-2(1 + r^2)(r + s + r^2s). \quad \dots (5.3)$$

这个元素必须为零。若  $r = i$ ,

$$y(s)x(i)\omega x(-i)y(-s) = \begin{pmatrix} 1 & i - 2s & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ i - 2s & \frac{1}{2}(i - 2s)^2 & -1 \end{pmatrix}.$$

此时只能有  $s = \frac{i}{2}$ 。再取  $z = s_1 s_2$ ，计算得  $y(\frac{i}{2})x(i)s_1 s_2 x(-i)y(-\frac{i}{2})$  的  $(2, 1)$ -元素为  $-4(a + ib)\sqrt{a^2 + b^2 - 1}$ ，显然也是非零的，矛盾。若  $r = -i$ ，类似的计算得知  $s = -\frac{i}{2}$ ，以及  $y(-\frac{i}{2})x(-i)s_1 s_2 x(i)y(\frac{i}{2})$  的  $(2, 1)$ -元素为非零的  $-4(a - ib)\sqrt{a^2 + b^2 - 1}$ ，得到矛盾。因此，想让式子 (5.3) 为零，只能有  $r + s + r^2 s = 0$ 。已知  $1 + r^2 \neq 0$ ，这等价于  $s = \frac{-r}{1+r^2}$ 。取  $z = s_1 s_2$ ，计算

$$g s_1 s_2 g^{-1} = y\left(\frac{-r}{1+r^2}\right)x(r)s_1 s_2 x(-r)y\left(\frac{r}{1+r^2}\right) = \begin{pmatrix} * & * & * \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} z_{21} &= \frac{1}{1+r^2} \left( (r^2 - 1) \left( 4r(1 - b^2) - 4ra^2 + 2a(1 + r^2)\sqrt{a^2 + b^2 - 1} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2ab(1 + r^2)^2 + 4br(1 + r^2)\sqrt{a^2 + b^2 - 1} \right), \\ z_{31} &= \frac{-1}{(1+r^2)^3} \left( (r^2 - 1) \left( 2r(b^2 - 1) + 2ra^2 + a(1 + r^2)\sqrt{a^2 + b^2 - 1} \right) \right. \\ &\quad \left. + ab(1 + r^2)^2 + 2br(1 + r^2)\sqrt{a^2 + b^2 - 1} \right), \\ z_{22} &= \frac{1}{(1+r^2)^2} \left( 4(b^2 - 1)r^2 + a^2(1 + 6r^2 + r^4) - 4ar(1 + r^2)\sqrt{a^2 + b^2 - 1} \right), \\ z_{32} &= \frac{1}{2(1+r^2)^4} \left( (r^2 - 1)^2 - a^2(r^2 - 1)^2 - 2b^2(1 + r^4) \right. \\ &\quad \left. - 2b(r^4 - 1)\sqrt{a^2 + b^2 - 1} \right), \\ z_{23} &= 2(r^2 - 1)^2 - 2a^2(r^2 - 1)^2 - 4b^2(1 + r^4) + 4b(r^4 - 1)\sqrt{a^2 + b^2 - 1}, \\ z_{33} &= \frac{1}{(1+r^2)^2} \left( 4(b^2 - 1)r^2 + a^2(1 + 6r^2 + r^4) + 4ar(1 + r^2)\sqrt{a^2 + b^2 - 1} \right). \end{aligned}$$

若  $g s_1 s_2 g^{-1} \in \omega \mathfrak{h}$ ，则有  $z_{22} = z_{33} = 0$ ，而

$$0 = z_{33} - z_{22} = \frac{8ar\sqrt{a^2 + b^2 - 1}}{1 + r^2},$$

因此只能  $r = 0$ 。但这意味着  $s = 0$ ， $g = e$ ，上一段中已经知道这种情况不可能出现。因此，必有  $g s_1 s_2 g^{-1} \in \mathfrak{h}$ ，从而  $z_{23} = z_{32} = 0$ ，于是

$$0 = \frac{1}{2} z_{23} - 2(1 + r^2)^4 z_{32} = 4b(r^4 - 1)\sqrt{a^2 + b^2 - 1},$$

因此只能  $r^4 - 1 = 0$ 。再次注意到  $r^2 + 1 \neq 0$ ，所以  $r^2 - 1 = 0$ 。藉此化简  $z_{21}$  和  $z_{31}$  得到

$$\begin{aligned} z_{21} &= \frac{1}{1+r^2} \left( -2ab(1 + r^2)^2 + 4br(1 + r^2)\sqrt{a^2 + b^2 - 1} \right), \\ z_{31} &= \frac{-1}{(1+r^2)^3} \left( ab(1 + r^2)^2 + 2br(1 + r^2)\sqrt{a^2 + b^2 - 1} \right). \end{aligned}$$



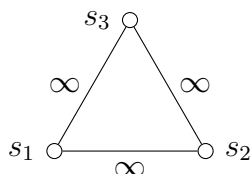
它们都得为零，从而

$$(1+r^2)z_{21} + 2(1+r^2)^3 z_{31} = -4ab(1+r^2)^2 = 0,$$

但这是个矛盾。

至此，我们说明了  $\overline{W}^0$  不可能是  $SO_3(\mathbb{C})$  的某个极大环面，因而只能有  $\overline{W}^0 = SO_3(\mathbb{C})$ 。

5.6.5 现在假设  $(W, S)$  的 Coxeter 图如下，



在基  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  下，双线性型  $B$  和  $s_1, s_2, s_3$  的表示矩阵分别为

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_1 : \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$s_2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

取另一组基  $\{v_1, v_2, v_3\}$ ,

$$(v_1, v_2, v_3) := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot Q, \quad \text{其中 } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

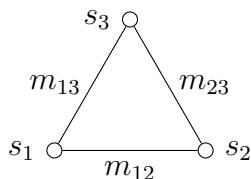
在这组基下  $B$  和  $s_1, s_2, s_3$  的表示矩阵分别为 (并以此将  $W$  视为  $GL_3(\mathbb{C})$  的子群)

$$Q^T B Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = J, \quad s_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$s_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_3 = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

于是  $s_1 s_2 = x(1)$ ,  $s_1 s_3 = y(4)$ 。与 5.4.1 一样，这意味着  $\overline{W} = O_3(\mathbb{C})$ 。

5.6.6 在 5.6.6 和 5.6.7 中，假设  $(W, S)$  为双曲型，Coxeter 图如下，且  $m_{12} < \infty$ ,



在基  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  下, 双线性型  $B$  和  $s_1, s_2, s_3$  的表示矩阵分别为

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ a & 1 & b \\ c & b & 1 \end{pmatrix}, \quad s_1 : \begin{pmatrix} -1 & -2a & -2c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$s_2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2a & -1 & -2b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2c & -2b & -1 \end{pmatrix}.$$

其中  $a = -\cos \frac{\pi}{m_{12}}$ ,  $b = -\cos \frac{\pi}{m_{23}}$ ,  $c = -\cos \frac{\pi}{m_{13}}$ 。注意  $a, b, c \in [-1, 0)$ , 且  $a \neq -1$ 。该 Coxeter 群为双曲型当且仅当  $a^2 + b^2 + c^2 - 2abc - 1 > 0$ 。记

$$\theta := \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2abc - 1},$$

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & \frac{c-a(b+\theta)}{2\theta} & \frac{c+a(\theta-b)}{(a^2-1)\theta} \\ 0 & \frac{b-ac+\theta}{2\theta} & \frac{b-ac-\theta}{(a^2-1)\theta} \\ 0 & \frac{a^2-1}{2\theta} & \frac{1}{\theta} \end{pmatrix}.$$

取一组新的基  $\{v_1, v_2, v_3\}$ , 并通过这组基把  $\text{GL}(V_{\text{geom}})$  等同于  $\text{GL}_3(\mathbb{C})$ ,

$$(v_1, v_2, v_3) := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot Q.$$

在这组基下  $B$  和  $s_1, s_2, s_3$  的表示矩阵分别为

$$Q^T B Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = J, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 - 2a^2 & a(a^2 - 1) & -2a \\ -2a & a^2 & -2 \\ a(a^2 - 1) & -\frac{1}{2}(a^2 - 1)^2 & a^2 \end{pmatrix},$$

$$s_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_3 = \begin{pmatrix} 1 - 2c^2 & c(ac - b - \theta) & \frac{2c(ac - b + \theta)}{1 - a^2} \\ \frac{2c(ac - b + \theta)}{1 - a^2} & c^2 & \frac{2(ac - b + \theta)^2}{-(a^2 - 1)^2} \\ c(ac - b - \theta) & -\frac{1}{2}(b - ac + \theta)^2 & c^2 \end{pmatrix}.$$

以此将  $W$  视为  $\text{GL}_3(\mathbb{C})$  的子群。

与 5.6.3 类似, 想证明  $W$  的 Zariski 闭包  $\overline{W}$  为  $\text{O}_3(\mathbb{C})$ , 只需说明  $\overline{W}^0$  不为  $\text{SO}_3(\mathbb{C})$  的某个极大环面。

**5.6.7** 设定如 5.6.6。假设  $\overline{W}^0 = g^{-1}\mathfrak{H}g$  为  $\text{SO}_3(\mathbb{C})$  的某个极大环面, 其中  $g \in \text{SO}_3(\mathbb{C})$ 。与 5.6.4 一样, 可取  $g \in \mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}\mathfrak{X}$ , 并且若  $z \in \overline{W} \cap \text{SO}_3(\mathbb{C})$ , 则应有

$$gzg^{-1} \in N_{\text{SO}_3(\mathbb{C})}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H} \sqcup \omega\mathfrak{H}.$$

先假设  $g = x(r) \in \mathfrak{X}$ , 其中  $r \in \mathbb{C}$ 。取  $z = s_1 s_2$ , 计算得到

$$gzg^{-1} = x(r)s_1 s_2 x(-r) = \begin{pmatrix} * & (a^2 - 1)(a^2 r - r - a) & * \\ * & * & * \\ (a^2 - 1)(a^2 r - r + a) & * & * \end{pmatrix}$$

由于  $a \in (-1, 0)$ , 有  $a^2 - 1 \neq 0$ , 因此

$$a^2r - r - a = a^2r - r + a = 0.$$

但这又与  $a \neq 0$  矛盾。

考虑另一情形, 设  $g = y(s)x(r) \in \mathfrak{Y}\mathfrak{X}$ , 其中  $s, r \in \mathbb{C}$ . 先取  $z = s_1s_2$ , 计算得到

$$gzg^{-1} = y(s)x(r)s_1s_2x(-r)y(-s) = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & (\lambda + a)^2 & -2((a^2 - 1)r^2 - 1)^2 \\ * & -\frac{1}{2}\mu^2 & (\lambda - a)^2 \end{pmatrix},$$

其中

$$\lambda = r + s + r^2s - a^2r(1 + rs),$$

$$\mu = (1 - a^2)(1 + rs)^2 + s^2.$$

同样由于  $a \neq 0$ , 对角线上的  $(\lambda + a)^2$  和  $(\lambda - a)^2$  不能同时为零, 因此  $gzg^{-1} \notin \omega\mathfrak{H}$ , 即  $gzg^{-1} \in \mathfrak{H}$ , 从而

$$-2((a^2 - 1)r^2 - 1)^2 = 0, \quad \text{即 } r^2 = \frac{1}{a^2 - 1} \in \mathbb{R}^{<0},$$

$$\mu = (1 - a^2)(1 + rs)^2 + s^2 = 0, \quad \text{即 } (1 + rs)^2 = \frac{s^2}{a^2 - 1} = r^2s^2.$$

从第二式的  $(1 + rs)^2 = r^2s^2$  可得到

$$1 + 2rs = 0, \quad \text{即 } s = -\frac{1}{2r}.$$

现在  $r$  和  $s$  的取值只剩下两种可能,

$$r = \frac{i}{\sqrt{1 - a^2}}, \quad s = \frac{i\sqrt{1 - a^2}}{2} \quad \text{或} \quad r = \frac{-i}{\sqrt{1 - a^2}}, \quad s = \frac{i\sqrt{1 - a^2}}{-2}.$$

若为前者, 取  $z = s_1s_3$ , 计算得

$$gzg^{-1} = y\left(\frac{i\sqrt{1 - a^2}}{2}\right)x\left(\frac{i}{\sqrt{1 - a^2}}\right)s_1s_3x\left(\frac{-i}{\sqrt{1 - a^2}}\right)y\left(\frac{i\sqrt{1 - a^2}}{-2}\right)$$

的  $(3, 1)$ -元素为

$$\frac{\theta}{2\sqrt{1 - a^2}} \left( i(b - ac) - c\sqrt{1 - a^2} \right).$$

但是  $\theta, c \in \mathbb{R}^\times$ , 这个数显然不为零, 矛盾。我们的目的达到了。



## 参考文献

- [1] Achar P N, Hardesty W, Riche S. On the Humphreys conjecture on support varieties of tilting modules. *Transform. Groups*, 2019. 24(3): pp. 597–657
- [2] Bédard R. Cells for two Coxeter groups. *Comm. Algebra*, 1986. 14(7): pp. 1253–1286
- [3] Belolipetsky M. Cells and representations of right-angled Coxeter groups. *Selecta Math. (N.S.)*, 2004. 10(3): pp. 325–339
- [4] Belolipetsky M V, Gunnells P E. Cells in Coxeter groups, I. *J. Algebra*, 2013. 385: pp. 134–144
- [5] Benoist Y, de la Harpe P. Adhérence de Zariski des groupes de Coxeter. *Compos. Math.*, 2004. 140(5): pp. 1357–1366
- [6] Beilinson A, Bernstein J. Localisation de  $\mathfrak{g}$ -modules. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 1981. 292(1): pp. 15–18
- [7] Borel A. *Linear Algebraic Groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 126. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1991, xii+288 pp.
- [8] Bourbaki N. *Lie Groups and Lie Algebras. Chapters 4–6. Elements of Mathematics (Berlin)*. Berlin: Springer-Verlag, 2002, xii+300 pp. Translated from the 1968 French original by Andrew Pressley
- [9] Brylinski J L, Kashiwara M. Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems. *Invent. Math.*, 1981. 64(3): pp. 387–410
- [10] Chevalley C. *Théorie des groupes de Lie. Tome III. Théorèmes généraux sur les algèbres de Lie*. Actualités Sci. Ind. no. 1226. Paris: Hermann & Cie, 1955, 239 pp.
- [11] Coxeter H S M. Discrete groups generated by reflections. *Ann. of Math. (2)*, 1934. 35(3): pp. 588–621
- [12] ———. The complete enumeration of finite groups of the form  $R_i^2 = (R_i R_j)^{k_{ij}} = 1$ . *J. Lond. Math. Soc.*, 1935. 10: pp. 21–25
- [13] Curtis C W, Iwahori N, Kilmoyer R. Hecke algebras and characters of parabolic type of finite groups with  $(B, N)$ -pairs. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 1971. (40): pp. 81–116
- [14] Deodhar V V. On the root system of a Coxeter group. *Comm. Algebra*, 1982. 10(6): pp. 611–630
- [15] Elias B, Williamson G. The Hodge theory of Soergel bimodules. *Ann. of Math. (2)*, 2014. 180(3): pp. 1089–1136
- [16] Fulton W, Harris J. *Representation Theory. A First Course*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 129. New York: Springer-Verlag, 1991, xvi+551 pp.
- [17] Hiller H. *Geometry of Coxeter Groups*, Research Notes in Mathematics, vol. 54. Boston, Mass.-London: Pitman (Advanced Publishing Program), 1982, iv+213 pp.
- [18] Humphreys J E. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 9. New York-Berlin: Springer-Verlag, 1972, xii+169 pp.
- [19] ———. *Linear Algebraic Groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 21. New York-Heidelberg: Springer-Verlag, 1975, xvi+253 pp.
- [20] ———. *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 29. Cambridge: Cambridge University Press, 1990, xii+204 pp.
- [21] Iwahori N. On the structure of a Hecke ring of a Chevalley group over a finite field. *J. Fac.*

- Sci. Univ. Tokyo Sect. I, 1964. 10: pp. 215–236
- [22] Jantzen J C. Representations of Algebraic Groups, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 107. 2nd ed. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2003, xiv+576 pp.
- [23] Kato S i. A realization of irreducible representations of affine Weyl groups. *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, 1983. 45(2): pp. 193–201
- [24] Kazhdan D, Lusztig G. Representations of Coxeter groups and Hecke algebras. *Invent. Math.*, 1979. 53(2): pp. 165–184
- [25] ———. Schubert varieties and Poincaré duality. In: Osserman R, Weinstein A, eds., *Geometry of the Laplace Operator*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXVI. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1980. pp. 185–203
- [26] Lam T Y. *A First Course in Noncommutative Rings*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 131. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2001, xx+385 pp.
- [27] Lusztig G. On a theorem of Benson and Curtis. *J. Algebra*, 1981. 71(2): pp. 490–498
- [28] ———. Unipotent characters of the symplectic and odd orthogonal groups over a finite field. *Invent. Math.*, 1981. 64(2): pp. 263–296
- [29] ———. Some examples of square integrable representations of semisimple  $p$ -adic groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1983. 277(2): pp. 623–653
- [30] ———. Cells in affine Weyl groups. In: Hotta R, ed., *Algebraic Groups and Related Topics* (Kyoto/Nagoya, 1983), *Adv. Stud. Pure Math.*, vol. 6. Amsterdam: North-Holland, 1985. pp. 255–287
- [31] ———. Cells in affine Weyl groups. II. *J. Algebra*, 1987. 109(2): pp. 536–548
- [32] ———. Cells in affine Weyl groups. III. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 1987. 34(2): pp. 223–243
- [33] ———. Leading coefficients of character values of Hecke algebras. In: Fong P, ed., *The Arcata Conference on Representations of Finite Groups* (Arcata, Calif., 1986), *Proc. Sympos. Pure Math.*, vol. 47 Part 2. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1987. pp. 235–262
- [34] ———. Hecke algebras with unequal parameters, 2014. arXiv:0208154v2
- [35] Munkres J R. *Topology*. 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, Inc., 2000, xvi+537 pp.
- [36] Qi D. On irreducible, infinite, nonaffine Coxeter groups. *Fund. Math.*, 2007. 193(1): pp. 79–93
- [37] Serre J P. *Linear representations of finite groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 42. New York-Heidelberg: Springer-Verlag, 1977, x+170 pp. Translated from the second French edition by Leonard L. Scott
- [38] Springer T A. Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups. *Invent. Math.*, 1976. 36: pp. 173–207
- [39] ———. A construction of representations of Weyl groups. *Invent. Math.*, 1978. 44(3): pp. 279–293
- [40] ———. *Linear Algebraic Groups*, Progress in Mathematics, vol. 9. 2nd ed. Boston, MA: Birkhäuser Boston, Inc., 1998, xiv+334 pp.
- [41] Steinberg R. Endomorphisms of linear algebraic groups. *Memoirs of the American Mathematical Society*, No. 80. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1968, 108 pp.
- [42] ———. *Lectures on Chevalley Groups*, University Lecture Series, vol. 66. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2016, xi+160 pp. Revised and corrected edition of the 1968 original

- [43] Xi N H. Lusztig's  $A$ -function for Coxeter groups with complete graphs. Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.), 2012. 7(1): pp. 71–90
- [44] Xu T Y. On the subregular  $J$ -rings of Coxeter systems. Algebr. Represent. Theory, 2019. 22(6): pp. 1479–1512





## 致 谢

首先，毫无争议地，要感谢我的研究生导师席南华研究员。除了学术上的指导，他在价值观和品味上对我影响极大，身体力行教导我们莫追名利，而应专注于数学上的乐趣。很多影响是终身性的，在眼界、审美等各方面上，都广泛适用。几年前当我陷于极度失落和沮丧的情绪中，以至于一度想要终止学业时，席老师以乐观豁达的态度予以鼓励，并纠正我很多如今看来幼稚且不正确的想法和观念。对学习有帮助的任何事情，席老师不遗余力地予以帮助和支持，在自己的时间和经费上从不吝啬。在我的博士论文写作期间，席老师耗费大量时间和精力，给予相当细致的指导，他的丰富经验和敏锐的观察常能及时为我点明思考的方向，这样的能力和学识令我叹服。

在学业上同样要感谢方明老师和聂思安老师极多的指导和帮助，他们在很多方面对我的影响不亚于学业导师。感谢诸多同门如陈攀，董俊斌，高剑伟，巩峻成，桂弢，郭锦豪，胡越，刘敏华，邱燕南，谢迅，余庆超等等(按学界惯例，以字母表顺序排列)，以及曹海原，李鹏程，谭盼君，邵春霖，邵锋，孙瑾，徐旺，杨若涛，余智航，朱秀武等同学，在许多讨论和交流中让我获益，也让我获得了大量的知识。在五年的研究生生涯中，他们是陪伴我时间最长的一群人。必须感谢和铭记从幼儿园到研究生阶段所有的任课老师，他们由浅入深引领我进入知识的海洋。感谢我当助教期间班上的所有同学，给我带来了许多新知、经验和欢乐，我不仅是助教，也是他们的学生。

我在加州大学河滨分校访学期间，Carl Mautner, Ziv Ran 等教授和 Ethan Kowalenko, Christian Williams 等几位研究生在学习上和生活上给予我很多帮助和照顾，也让我见识到了他们在学术上的热情和纯粹。前往纽约石溪参加会议时，Ethan 与我同行，旅途中他在各方面为我提供了很多帮助。在此对他们表示衷心的感谢。感谢华人房东季璘、徐嘉阳夫妇在异国他乡为我的生活提供便利和照顾，和他们在那幢房子中度过的半年时光是很愉快的。感谢国家留学基金委提供资助。

我的父母和女友对我无条件支持，提供生活上和精神上的全面保障。父母也是我的第一任启蒙老师，从汉语拼音、基础算术与几何辅导我的功课。小学时解不出来的数学题，寻求父亲帮助便能迎刃而解。为减轻我的负担，他们替我抄写很多无意义的数学作业。更别提生活上的照顾和养育之恩。我的女友常能安抚我的心灵，虽然也会闹矛盾，但终究不离不弃。我亏欠他们太多，也曾他们在他们身上宣泄过情绪。希望在接下来的时间里，我能多加陪伴以弥补他们牺牲的万一。

包括胡美欣，林泽丰，刘帅鹏在内的众多挚友和亲人也应当被感谢，他们对我十分关心，在我住院或手术期间前来陪伴和探望，也在其他方方面面帮过很多忙，给予很多照顾和关怀。名字列不尽，但都铭记于心。感谢矫佳庚承担

考核和答辩的秘书工作。

幼时我体弱多病，十几年的运动让我现在有一个相对健康的身体。这要感谢我的各路球友。除了业余的锻炼，在赛场上和他们一起拼搏荣誉、为学校或团队争光的经历也十分令人怀念。

感谢这一路上的困难挫折，魑魅魍魉，它们让我这个无知幼稚，自以为是的小孩逐渐成熟，心态更加平和。

最后，但也同样重要的，要感谢我们的国家、党和政府，几十年来经济和国力快速提高，为我们提供优渥的科研环境，在强敌环伺的国际社会中维护国内的稳定，应对新冠疫情强而有力，让我们得以尽早恢复正常的学习交流和生活。纵使还有千百般问题，现在的一切已是来之不易，是千千万万人各种形式的牺牲和心血拼来的。在这样的条件下还不够努力，我应当感到羞愧。希望日后我可以成为一个对他人，对社会，乃至对全人类有用的人。

胡泓昇

2021年04月23日，于数学所

如 5.6 节中所说，我在完成论文后经他人提醒发现，文中的主要结果之一(定理 5.6.1) 被前人已发表的结果覆盖，因此延期一年毕业。我或许将成为少有的通过两次博士学位答辩的学生。在这里要感谢提醒我的徐林霄同学，他让我避免了学位论文中带有缺陷的窘境。如果是若干年后才发现这个状况，这必是一大遗憾。同时也感谢傅翔老师，谢谢他为我保留博后的职位，并为我提供许多帮助。

感谢数学院里的许多老师，如陈绍示，付保华，李俐，刘劲松，刘霞，徐晓平，尹永华，张平等，他们在我延毕时向我表示了充分的关心和安慰，并提供了很多支持。

最后要感谢的还是席老师，谢谢他依旧充满耐心地指导我的学习和工作。很惭愧我没能做出像样的工作，今后还得保持谦逊，虚心学习，希望能将这份热爱延伸到人生迟暮时。

胡泓昇

2022年04月01日，于数学所

## 作者简历及攻读学位期间发表的学术论文与研究成果

### 作者简历:

2012年09月—2016年06月,在复旦大学数学科学学院获得学士学位。

2016年09月—2022年06月,在中国科学院数学与系统科学研究院攻读博士学位,师从席南华研究员。

2019年02月—2019年08月,受国家留学基金委资助(No. 201804910559)在加州大学河滨分校(University of California, Riverside)访问。访学导师: Carl Mautner 教授。

### 教学经历:

2019—2020 学年秋季学期,中国科学院大学本科二年级代数课程助教。任课教师: 席南华。

2021—2022 学年春季学期,中国科学院大学本科一年级线性代数 II-B 助教。任课教师: 方明。

### 已发表(或正式接受)的学术论文:

无。

### 预印本:

Hongsheng Hu. Representations of Coxeter groups and homology of Coxeter graphs. arXiv:2112.03771

Hongsheng Hu. Some infinite dimensional representations of certain Coxeter groups. arXiv:2205.09294

